10 Euler

Equations différentielles

Exercice 1

Considérons l'équation différentielle (E) : $\begin{cases} f'(x) = 0{,}01f^2(x) + 3\sqrt{x}, x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 2 \end{cases}$

1. Utiliser la méthode d'Euler avec un pas $h = 0{,}1$ pour calculer les valeurs approchées de $f(0{,}1)$, $f(0{,}2)$ et $f(0{,}3)$.

2. Ecrire une fonction Python qui prend en argument les conditions initiales de (E) et qui renvoie la liste de 10 réels espacés de 0,1 à partir de 0, la liste des images approchées par la méthode d'Euler de ces réels par f et qui trace la courbe approchée de f.

Correction

1. Pour $x = 0$:
   $f(0) = 2$
   $f'(0) = 0{,}01f^2(0) + 3\sqrt{0} = 0{,}01 \times 2^2 + 3\sqrt{0} = 0{,}04.$
   Pour $x = 0{,}1$:
   $f(0{,}1) = f(0 + 0{,}1) \approx f(0) + 0{,}1f'(0) \approx 2{,}004.$
   $f'(0{,}1) = 0{,}01f^2(0{,}1) + 3\sqrt{0{,}1} \approx 0{,}989.$
   Pour $x = 0{,}2$:
   $f(0{,}2) = f(0{,}1 + 0{,}1) \approx f(0{,}1) + 0{,}1f'(0{,}1) \approx 2{,}103.$
   $f'(0{,}2) = 0{,}01f^2(0{,}2) + 3\sqrt{0{,}2} \approx 1{,}386.$
   Pour $x = 0{,}3$:
   $f(0{,}3) = f(0{,}2 + 0{,}1) \approx f(0{,}2) + 0{,}1f'(0{,}2) \approx 2{,}24.$

2.

```python
from math import sqrt
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def image(x,y):
    h=0.1
    L=[]
    J=[]
    for i in range(10):
        L.append(x)
        J.append(y)
        y=y+h*(0.01*y**2+3*sqrt(x))
        x=x+h
    plt.plot(L, J)
    plt.show()
    return(L,J)
```

Exercice 2

Soient $(E) : f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = -e^x, x \in \mathbb{R}$ et $(H) : f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $(k,m) \in \mathbb{R}^2$, $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ke^x + me^{2x} \end{array} \right.$ est solution de (H).
2. Montrer que $j : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{array} \right.$ est solution de (E).
3. Montrer que $g + j$ est solution de (E).

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $g'(x) = ke^x + 2me^{2x}$
   $g''(x) = ke^x + 4me^{2x}$
   $$\begin{aligned} g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) &= ke^x + 4me^{2x} - 3(ke^x + 2me^{2x}) + 2(ke^x + me^{2x}) \\ &= ke^x + 4me^{2x} - 3ke^x - 6me^{2x} + 2ke^x + 2me^{2x} \\ &= 0 \end{aligned}$$
   g est bien solution de (H).

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $j'(x) = xe^x + e^x$
   $j''(x) = xe^x + 2e^x$
   $$\begin{aligned} j''(x) - 3j'(x) + 2j(x) &= xe^x + 2e^x - 3(xe^x + e^x) + 2xe^x \\ &= 3xe^x + 2e^x - 3xe^x - 3e^x \\ &= -e^x \end{aligned}$$
   j est bien solution de (E).

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} (g+j)''(x) - 3(g+j)'(x) + 2(g+j)(x) &= g''(x) + j''(x) - 3g'(x) - 3j'(x) + 2g(x) + 2j(x) \\ &= g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) + j''(x) - 3j'(x) + 2j(x) \\ &= 0 - e^x \\ &= -e^x \end{aligned}$$
   $g + j$ est bien solution de (E).

Exercice 3

Soit $(E) : 3f(x) - 4xf'(x) = -15x^2 + 3, x \in \mathbb{R}$.

Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour que $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array} \right.$ soit solution de (E).

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow 3g(x) - 4xg'(x) = -15x^2 + 3 \\ &\Leftrightarrow 3(ax^2 + bx + c) - 4x(2ax + b) = -15x^2 + 3 \\ &\Leftrightarrow 3ax^2 + 3bx + 3c - 8ax^2 - 4bx = -15x^2 + 3 \\ &\Leftrightarrow -5ax^2 - bx + 3c = -15x^2 + 3 \end{aligned}$$

Par identification, on obtient : $\left\{ \begin{array}{ccc} -5a & = & -15 \\ -b & = & 0 \\ 3c & = & 3 \end{array} \right.$

Ainsi $a = 3, b = 0$ et $c = 1$.

$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2 + 1 \end{array} \right.$ est solution de (E).