11 Abel et Galois

Résolutions d'équations

Exercice 1

1. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$. On considère, pour tout réel x, le polynôme $ax^2 + bx + c$.
   Supposons que ce polynôme admette deux racines réelles x_1 et x_2.
   Montrer que $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

2. Déterminer les deux réels u et v tels que $\left\{\begin{array}{rcl} uv & = & -\dfrac{1}{2} \\ u+v & = & -1 \end{array}\right.$

Correction

1. x_1 et x_2 sont racines de $ax^2 + bx + c \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

   $$\begin{aligned} a(x-x_1)(x-x_2) &= a(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2) \\ &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a x_1 x_2 \end{aligned}$$

   Par identification : $\left\{\begin{array}{rcl} a x_1 x_2 & = & c \\ -a(x_1 + x_2) & = & b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 x_2 & = & \dfrac{c}{a} \\ x_1 + x_2 & = & -\dfrac{b}{a} \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcl} uv & = & -\dfrac{1}{2} \\ u+v & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow u$ et v sont les racines du polynôme réel $x^2 - x - \dfrac{1}{2}$.

   On calcule le discriminant Δ de ce polynôme.

   $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3 > 0$. Ce polynôme admet deux racines réelles.

   $u = \dfrac{-(-1) + \sqrt{3}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$ et $v = \dfrac{-(-1) - \sqrt{3}}{2} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$

Exercice 2

Soient $x \in \mathbb{R}$ et le polynôme $P = x^3 - 11x^2 + 38x - 40$.

1. Montrer que 2 est racine de P.

2. Déterminer les trois réels a,b,c tels que $P = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.

3. Déterminer toutes les racines de P.

Correction

1. 2 est racine de P $\Leftrightarrow P(2) = 0$.
   $$\begin{aligned} P(2) &= 2^3 - 11 \times 2^2 + 38 \times 2 - 40 \\ &= 8 - 44 + 76 - 40 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} P &= (x-2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 - 2ax^2 + bx^2 - 2bx + cx - 2c \\ &= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c \end{aligned}$$
   Par identification : $\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b-2a & = & -11 \\ c-2b & = & 38 \\ -2c & = & -40 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b-2 & = & -11 \\ 20-2b & = & 38 \\ c & = & 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & -9 \\ c & = & 20 \end{array}\right.$
   Ainsi $P = (x-2)(x^2 - 9x + 20)$.

3. On résout $P = 0$.
   $P = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 9x + 20) = 0$
   $\Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $x^2 - 9x + 20 = 0$
   $\Leftrightarrow x = 2$ ou On calcule le discriminant Δ de $x^2 - 9x + 20$
   $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 20 = 1 > 0$
   $x^2 - 9x + 20$ admet 2 racines réelles
   $x_1 = \dfrac{-(-9) + \sqrt{1}}{2} = 5$; $x_2 = \dfrac{-(-9) - \sqrt{1}}{2} = 4$

   Ainsi les racines de P sont 2, 4 et 5.

Exercice 3

Soit l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ $(E) : x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0$.

1. Effectuer le changement d'inconnue $x = z + 2$ et montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme $az^4 + bz^2 + c = 0$ où a,b,c sont des réels à déterminer.

2. Résoudre (E).

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} x = z+2 &\Leftrightarrow (z+2)^4 - 8(z+2)^3 + 14(z+2)^2 + 8(z+2) - 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow z^4 + 8z^3 + 24z^2 + 32z + 16 - 8(z^3 + 6z^2 + 12z + 8) + 14(z^2 + 4z + 4) + 8z + 16 - 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow z^4 + 8z^3 + 24z^2 + 32z + 16 - 8z^3 - 48z^2 - 96z - 64 + 14z^2 + 56z + 56 + 8z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z^4 - 10z^2 16 - 64 + 9 = 0 \end{aligned}$$

2. Soit $z \in \mathbb{R}$.
On pose $Z = z^2$.
$Z = z^2 \Leftrightarrow Z^2 - 10Z + 9 = 0$
On calcule le discriminant Δ de $Z^2 - 10Z + 9$.
$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 64 > 0$. L'équation admet deux solutions réelles.
$Z_1 = \dfrac{-(-10) + \sqrt{64}}{2} = 9\,;\ Z_2 = \dfrac{-(-10) - \sqrt{64}}{2} = 1$
Ainsi $z^2 = 9$ ou $z^2 = 1$
$z^2 = 9 \Leftrightarrow z = 3$ ou $z = -3$
$z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$
Puis $x = 3$ ou $x = 1$ ou $x = 5$ ou $x = -1$.