12 Du Châtelet

Etude de trajectoire, étude de fonction, étude de courbe.

Exercice 1

Un galet de masse $m = 0{,}5$ kg est jeté verticalement du haut de la Main Tower à Francfort (240 mètres de hauteur). Il tombe en chute libre. Son altitude en mètres en fonction de son temps de chute t en secondes est donné par la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - 5t + 240$, où g est l'accélération de la pesanteur qui vaut 9,8 m.s^{-2}.

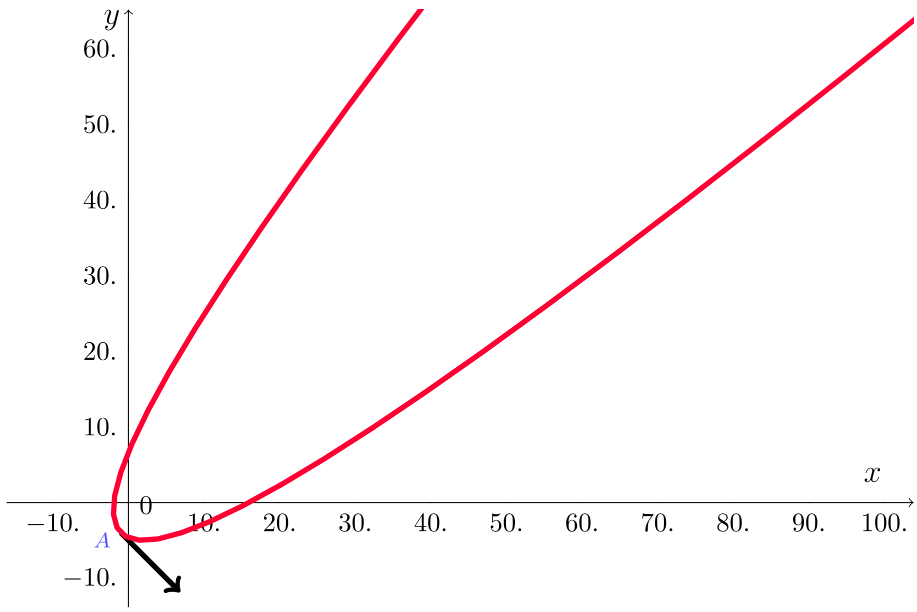
1. A quelle altitude se trouve le galet au bout d'une seconde de chute ?
2. Déterminer la fonction vitesse v de l'objet (dérivée de la fonction altitude) en fonction du temps.
3. On appelle énergie cinétique la quantité $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, et énergie potentielle de pesanteur d'un objet la quantité $E_{pp} = mgz$, où z désigne l'altitude de l'objet.
   Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur du galet.
4. On appelle énergie mécanique la quantité $E_m = E_c + E_{pp}$. Montrer que l'énergie mécanique du galet est constante (ne dépend pas de t).

Correction

1. $f(1) = -\frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 1^1 - 5 \times 1 + 240 = 230{,}1$. Le galet se trouve à 230,1 mètres d'altitude.
2. Pour tout réel t positif, $v(t) = f'(t) = -gt - 5$.
3. $E_c = \frac{1}{2} \times 0{,}5(-gt - 5)^2 = \frac{1}{4}(g^2t^2 + 10gt + 25) = \frac{1}{4}gt^2 + \frac{5}{2}gt + \frac{25}{4}$.
   $E_{pp} = 0{,}5 \times g(-\frac{1}{2}gt^2 - 5t + 240) = -\frac{1}{4}g^2t^2 - \frac{5}{2}gt + 120$.
4. $E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{4}gt^2 + \frac{5}{2}gt + \frac{25}{4} - \frac{1}{4}g^2t^2 - \frac{5}{2}gt + 120 = \frac{505}{4}$.
   Cette quantité ne dépend pas de t. E_m est constante.

Exercice 2

Considérons la courbe ci-dessous qui représente le déplacement d'un objet dans le plan rapporté au repère.



Les coordonnées de la position de l'objet sur la courbe sont données pour tout réel t par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t^2-2 \\ y(t) & = & t^2-4t-1 \end{array}\right.$$

1. Déterminer $t \in \mathbb{R}$ pour que l'objet soit en $A(-1,-4)$.

2. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse de l'objet (dérivée des coordonnées du point position).

3. Etudier les variations des coordonnées de la position de l'objet.

4. Déterminer une équation cartésienne de la courbe.

Correction

1. On résout $\left\{\begin{array}{lcl} -1 & = & t^2-2 \\ -4 & = & t^2-4t-1 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{lcl} -1 & = & t^2-2 \\ -4 & = & t^2-4t-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 3 & = & -2+4t+1 \\ -4 & = & t^2-4t-1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 4 & = & 4t \\ -4 & = & t^2-4t-1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} t & = & 1 \\ 1^2-4\times 1-1 & = & -4 \end{array}\right.$$

   Ainsi, $t=1$.

2. Pour tout réel t, $x'(t)=2t$ et $y'(t)=2t-4$.

   Ainsi, les coordonnées du vecteur vitesse sont $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 2t \\ y'(t) & = & 2t-4 \end{array}\right.$.

3.

t	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(t)$		$\searrow$	2		$\nearrow$		
$y'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$y(t)$			$\searrow$		-1	$\nearrow$	

4. $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t^2-2 \\ y & = & t^2-4t-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & -2+4t+1 \\ y & = & t^2-4t-1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & 4t-1 \\ y & = & t^2-4t-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x-y+1}{4} & = & t \\ y & = & t^2-4t-1 \end{array}\right.$$

On remplace t par $\dfrac{x-y+1}{4}$ dans la première équation.

$$x = \left(\frac{x-y+1}{4}\right)^2 - 2 \Leftrightarrow x = \frac{(x-y)^2+2(x-y)+1}{16} - 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{x^2+y^2-2xy+2x-2y+1-32}{16}$$

$$\Leftrightarrow 16x = x^2+y^2-2xy+2x-2y-31$$

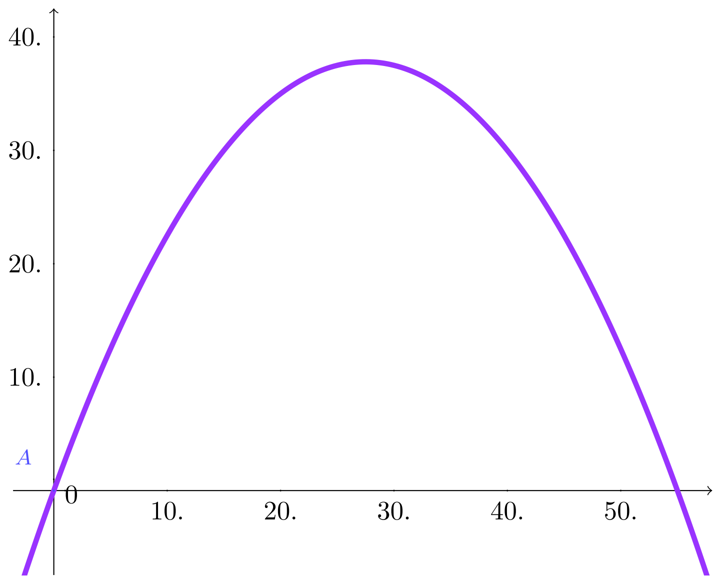
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy-14x-2y-31 = 0$$

Exercice 3

Léonard aime jouer au golf. Ce matin, il frappe une balle connectée et son application de traçage de balle lui donne les informations suivantes :

- Angle formé par l'horizontale et la balle au départ : $70°$.
- Hauteur maximale atteinte par la balle : 40 mètres.

1. On néglige la hauteur du support de la balle. Donner une équation de la trajectoire de la balle frappée par Léonard dans le repère ci-dessous, où la position initiale de la balle est en A. (on arrondira les résultats trouvés au centième près).
2. Déterminer la distance au point de départ à laquelle la balle retombe au sol.



Correction

1. La trajectoire de la balle est une parabole donc la trajectoire est la courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a,b,c sont des réels et $a \neq 0$.
Le point $(0{,}0)$ appartient à la trajectoire donc $c = 0$.
La tangente au point d'abscisse A a une équation de la forme $y = dx$, où $d \in \mathbb{R}$.
L'angle donné de $70 \circ$ signifie que $d = \tan 70 \circ$. Ainsi $d = 2{,}75$.
La hauteur maximale atteinte par la balle est 40 mètres. Cela signifie $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 40$.
$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{2{,}75}{2a}\right) = 40 &\Leftrightarrow a\left(-\frac{-2{,}75}{2a}\right)^2 + 2{,}75\left(-\frac{2{,}75}{2a}\right) = 40 \\
&\Leftrightarrow a\frac{2{,}75^2}{4a^2} - \frac{2{,}75^2}{2a} = 40 \\
&\Leftrightarrow \frac{7{,}5625}{4a} - 2\frac{7{,}5625}{4a} = 40 \\
&\Leftrightarrow -\frac{7{,}5625}{4a} = 40 \\
&\Leftrightarrow a = -\frac{7{,}5625}{4 \times 40} \\
&\Leftrightarrow a \approx 0{,}05
\end{aligned}$$
Ainsi, $y = -0{,}05x^2 + 2{,}75x$ est une équation de la trajectoire de la balle frappée par Léonard.

2. On résout $-0{,}05x^2 + 2{,}75x = 0$.

$$\begin{aligned}
-0{,}05x^2 + 2{,}75x = 0 &\Leftrightarrow x(-0{,}05x + 2{,}75) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -0{,}05x + 2{,}75 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{2{,}75}{0{,}05} \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 55
\end{aligned}$$

La balle retombe donc à 55 mètres de Léonard.