13 Bayes

Probabilités conditionnelles

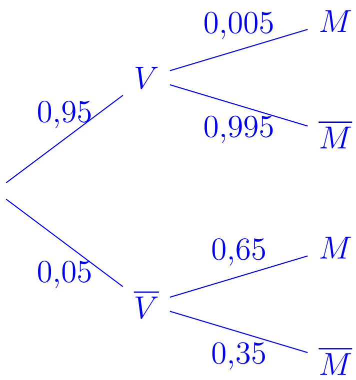
Exercice 1

Dans un élevage de lapins, 95% d'entre eux sont vaccinés contre la myxomatose. La probabilité qu'un lapin vacciné contracte la myxomatose est 0,5 % et la probabilité qu'un lapin non vacciné la contracte est 65 %.

1. Quelle est la probabilité qu'un lapin vacciné ne contracte pas la myxomatose ?
2. Quelle est la probabilité qu'un lapin choisi au hasard dans l'élevage soit vacciné et sain ?
3. On sélectionne un lapin au hasard dans l'élevage. Il est atteint de myxomatose. Quelle est la probabilité qu'il soit vacciné ?

Correction

1. Notons V l'événement « le lapin est vacciné » et M l'événement « le lapin contracte la myxomatose »



   $P_V(M) = 0{,}995$.

2. $P(V \cap \overline{M}) = P_V(\overline{M}) \times P(V) = 0{,}995 \times 0{,}95 = 0{,}94525$.

3. On cherche $P_M(V)$

   $P_M(V) = \dfrac{P(V \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P_V(M) \times P(V)}{P(M)}$.

   $$\begin{aligned} P(M) &= P(V \cap M) + P(\overline{V} \cap M) \\ &= P_V(M) \times P(V) + P_{\overline{V}}(M) \times P(\overline{V}) \\ &= 0{,}005 \times 0{,}95 + 0{,}65 \times 0{,}05 \\ &= 0{,}03725. \end{aligned}$$

   Ainsi $P_M(V) = \dfrac{0{,}005 \times 0{,}95}{0{,}0375} = 0{,}127$

Exercice 2

Une épidémie de Maladie se déclare au village Laplace. Un huitième de la population de Laplace est vacciné contre la Maladie.
Un quart des personnes atteintes de cette maladie est vacciné contre elle. Parmi les vaccinés, un dixième est atteint de la Maladie.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'une personne non vaccinée contre la Maladie soit atteinte ?

Correction

Notons V l'événement « la personne est vaccinée » et M l'événement « la personne contracte la Maladie »
$P(V) = \dfrac{1}{8}$
$P_M(V) = \dfrac{1}{4}$
$P_V(M) = \dfrac{1}{10}$

1. $$\begin{aligned} P(M) = P(M \cap \overline{V}) + P(M \cap V) &\Leftrightarrow P(M) = P_M(\overline{V}) \times P(M) + P_V(M) \times P(V) \\ &\Leftrightarrow P(M)(1 - P_M(\overline{V})) = P_V(M) \times P(V) \\ &\Leftrightarrow P(M) \times P_M(V) = P_V(M) \times P(V) \\ &\Leftrightarrow P(M) = \frac{P_V(M) \times P(V)}{P_M(V)} \\ &\Leftrightarrow P(M) = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} P_{\overline{V}}(M) &= \frac{P(M \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} \\ &= \frac{P(M) \times P_M(\overline{V})}{P(\overline{V})} \\ &= \frac{P(M) \times (1 - P_M(V))}{1 - P(V)} \\ &= \frac{3}{70} \end{aligned}$$

Exercice 3

Sophie joue à un jeu :

Dans un jeu de 32 cartes, elle tire 2 fois, successivement, une carte avec remise. Elle compte le nombre de cœurs obtenus. Elle lance ensuite un dé autant de fois que de cœurs obtenus dans la première partie du jeu. A chaque fois que Sophie obtient un nombre pair au dé, elle gagne deux euros.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de cœurs obtenus dans la première partie du jeu.

1. Déterminer la loi de X et calculer $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$.

2. Calculer la probabilité que Sophie gagne deux euros.

3. A la fin de la partie, Sophie n'a rien gagné. Calculer la probabilité qu'elle ait tiré 1 cœur.

Correction

1. On répète 2 fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli : tirer une carte. X compte le nombre de succès : obtenir un cœur. La probabilité du succès est $\frac{1}{4}$.

   X suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{4}$.

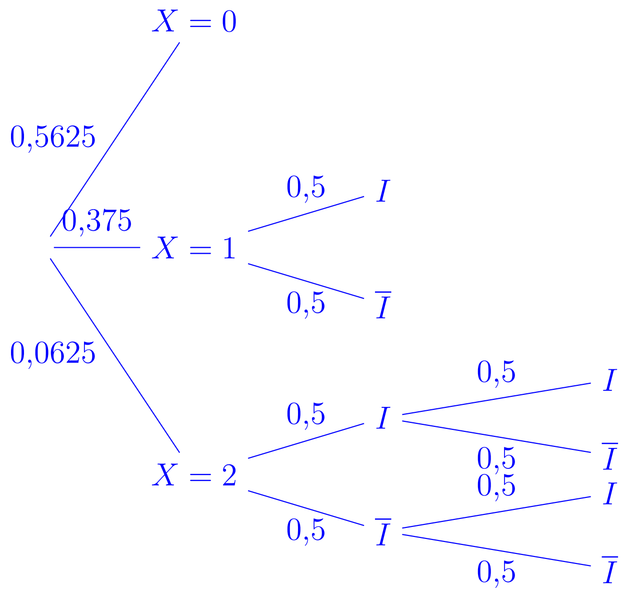
   $P(X=0) = \binom{2}{0} \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0{,}5625$

   $P(X=1) = \binom{2}{1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{8} = 0{,}375$

   $P(X=2) = \binom{2}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

2. On note G_0, G_2, G_4 les événements respectifs « Sophie gagne 0, 2 ou 4 € ».

   On appelle I l'événement « Sophie obtient un nombre impair au dé ».



   Sophie gagne deux euros si elle obtient un unique nombre pair au lancer de dé.

   Ainsi $G_2 = (\{X=1\} \cap \overline{I}) \cup (\{X=2\} \cap \overline{I} \cap I) \cup (\{X=2\} \cap I \cap \overline{I})$.

   $P(G_2) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{32}$.

3. $$\begin{aligned} P_{G_0}(X=1) &= \frac{P(\{X=1\} \cap G_0)}{P(G_0)} \\ &= \frac{P(\{X=1\} \cap I)}{P(G_0)} \end{aligned}$$

$$G_0 = \{X = 0\} \cup (\{X = 1\} \cap I) \cup (\{X = 2\} \cap I \cap I)$$

$$P(G_0) = \frac{9}{16} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{49}{64}.$$

$$P_{G_0}(X = 1) = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{2}}{\frac{49}{64}} = \frac{12}{49}$$