14 Hardy-Weinberg

Probabilités conditionnelles, suites arithmético-géométriques

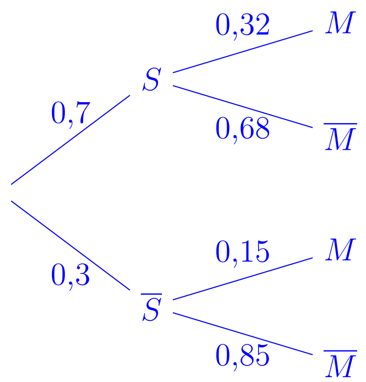
Exercice 1

Godfrey sort se promener chaque jour avec une probabilité de 70 %. Quand il se promène, la probabilité qu'il progresse dans ses recherches mathématiques est de 32 %. Quand il est reste chez lui une journée, la probabilité qu'il progresse dans ses recherches mathématiques est de 15 %.
On utilisera les notations suivantes :

- S est l'événement « Godfrey se promène ».
- M est l'événement « Godfrey progresse dans ses recherches mathématiques ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Soit un jour donné. Quelle est la probabilité que Godfrey reste chez lui et progresse dans ses recherches mathématiques ?
3. Soit un jour donné. Quelle est la probabilité que Godfrey progresse dans ses recherches mathématiques ?
4. Soit un jour donné. Godfrey n'a pas progressé dans ses recherches mathématiques. Quelle est la probabilité qu'il soit allé se promener ?

Correction

1. 

2. $P(S \cap M) = 0{,}7 \times 0{,}32 = 0{,}224$.
3. $P(M) = P(S \cap M) + P(\overline{S} \cap M) = 0{,}224 + 0{,}3 \times 0{,}15 = 0{,}269$
4. $P_{\overline{M}}(S) = \dfrac{P(S \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{0{,}7 \times 0{,}68}{1 - 0{,}269} \approx 0{,}651$.

Exercice 2

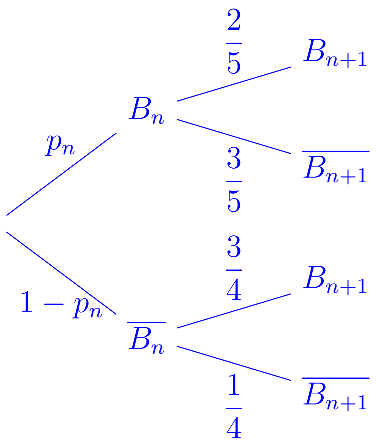
Gregor s'intéresse à la botanique et et à la météorologie. Chaque jour, il lit soit un traité de botanique, soit un traité de météorologie. Soient n un entier naturel et un jour donné n.

- S'il a lu un traité de botanique la veille, la probabilité qu'il lise un traité de météorologie est $\dfrac{3}{5}$.
- S'il a lu un traité de météorologie la veille, la probabilité qu'il lise un traité de botanique est $\dfrac{3}{4}$.
  Le premier jour de ses lectures, le jour 0, Gregor a lu un traité de botanique.

Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité que Gregor lise un traité de botanique au jour n.

1. Déterminer p_0.
2. Traduire la situation par un arbre pondéré en notant, pour tout entier naturel n, B_n l'événement « Gregor lit un traité de botanique au jour n » .
3. Démontrer que $p_{n+1} = -\dfrac{7}{20}p_n + \dfrac{3}{4}$.
4. On pose, pour tout entier naturel n $q_n = p_n - \dfrac{5}{9}$. Montrer que (q_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
5. Exprimer, pour tout entier naturel n, q_n en fonction de n et en déduire une expression de p_n en fonction de n.
6. En déduire la limite de (p_n). Interpréter le résultat.

Correction

1. Au jour 0, Gregor a lu un traité de botanique donc $p_0 = 1$.
2. 

3. p_{n+1} est la probabilité que Gregor lise un traité de botanique au jour $n+1$.
   $p_{n+1} = P(\overline{B_{n+1}}) = \dfrac{2}{5} \times p_n + \dfrac{3}{4}(1-p_n) = -\dfrac{7}{20}p_n + \dfrac{3}{4}$.
4. $q_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{5}{9} = -\dfrac{7}{20}p_n + \dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{9} = -\dfrac{7}{20}p_n + \dfrac{7}{36} = -\dfrac{7}{20}\left(p_n - \dfrac{\frac{7}{36}}{\frac{7}{20}}\right) = -\dfrac{7}{20}\left(p_n - \dfrac{5}{9}\right) = -\dfrac{7}{20}q_n$.
   (q_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{7}{20}$, de premier terme $q_0 = p_0 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}$.
5. Pour tout entier naturel n, $q_n = \dfrac{4}{9} \times \left(-\dfrac{7}{20}\right)^n$.

   On en déduit, pour tout entier naturel n, $p_n = \dfrac{4}{9} \times \left(-\dfrac{7}{20}\right)^n + \dfrac{5}{9}$.

6. $-1 < -\dfrac{7}{20} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{7}{20}\right)^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{5}{9}$.

A long terme, Gregor lira un traité de botanique avec la probabilité $\dfrac{5}{9}$

Exercice 3

Considérons une fleur dont la couleur (rouge, rose foncé, blanche) est codée par un gène qui possède deux allèles, R et B.
Le génotype BB donne la couleur blanche, le génotype RB donne la couleur rose foncé et le génotype RR donne la couleur rouge, l'allèle R étant dominant, l'allèle blanc récessif.
Démontrons que la fréquence de l'allèle blanc est constante au cours du temps.
Soient n, N deux entiers naturels. Dans une population de taille N de ces fleurs à la génération n, la fréquence de l'allèle B est notée p_n, celle de l'allèle R est notée q_n.
Le gène de la couleur ne possédant que deux allèles, $p_n + q_n = 1$.
On note B_n la probabilité qu'une fleur de la génération n soit blanche, de génotype BB, H_n la probabilité qu'une fleur de la génération n soit rose foncé, hétérozygote, de génotype RB et R_n la probabilité qu'une fleur de la génération soit rouge, de génotype RR.
Il n'existe que trois génotypes donc $B_n + H_n + R_n = 1$.

1. Etablir le carré de Punnett traduisant les transmissions possibles du gène de la couleur de la fleur à la génération $n+1$ et compléter ce carré avec les proportions données.

2. Déterminer la probabilité qu'une fleur de la génération $n+1$ soit blanche puis la probabilité qu'une fleur de la génération $n+1$ soit hétérozygote et enfin qu'une fleur de la génération $n+1$ soit rouge.

3. (a) Déterminer le nombre total d'allèles dans la population de fleurs à la génération n.
   (b) Calculer Calculer le nombre total d'allèles B à la génération n en fonction de p_n
   (c) Calculer le nombre total d'allèles B à la génération n en fonction de H_n et B_n.
   (d) En déduire que la fréquence p_n de l'allèle B à la génération n est $p_n = B_n + \dfrac{1}{2}H_n$

4. En déduire que la fréquence de l'allèle B est constante au cours du temps, c'est-à-dire, montrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = p_n$.

Correction

1.

	$R\ (q_n)$	$B\ (p_n)$
$R\ (q_n)$	RR	RB
$B\ (p_n)$	RB	BB

2. $B_{n+1} = p_n^2$; $H_{n+1} = 2p_nq_n$; $R_{n+1} = q_n^2$.

3. (a) Soit n un entier naturel. A la génération n, la taille de la population est N. Chaque fleur possédant deux allèles, il y a $2N$ allèles en tout.
   (b) H_n est la probabilité d'une fleur possède un seul allèle B. Le nombre d'allèles B parmi les fleurs hétérozygotes rose foncé est donc NH_n.
   B_n est la probabilité d'une fleur possède 2 allèles B. Le nombre d'allèles B parmi les fleurs blanches est donc $2NB_n$.
   Ainsi, le nombre total d'allèles B à la génération n est $2NB_n + NH_n$.
   (c) La fréquence de l'allèle B étant p_n, il y a $2Np_n$ allèles B en tout.
   (d) D'après ce qui précède, $2Np_n = 2NB_n + NH_n$.

   Ainsi, $p_n = \dfrac{2NB_n + NH_n}{2N} = B_n + \dfrac{1}{2}H_n$.

4. Calculons p_{n+1}.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= B_{n+1} + \frac{1}{2}H_{n+1} \\ &= p_n^2 + 2 \times \frac{1}{2}p_n q_n \\ &= p_n^2 + p_n(1-p_n) \\ &= p_n^2 + p_n - p_n^2 \\ &= p_n \end{aligned}$$

La fréquence de l'allèle B est bien constante au cours du temps.