15 Les vecteurs, une aventure collective

Calcul vectoriel, relation de Chasles

Exercice 1

Sur la figure ci-dessous, C est le milieu de $[AB]$ et $D \in [AB)$, $D \notin [AB]$.

Démontrer la proposition VI du Livre II des *Eléments* d'Euclide : $AD \times BD + CB^2 = CD^2$.

Correction

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD} = AD \times BD$ car $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = 0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} \text{ car } C \text{ est le milieu de } [AB].\end{aligned}$$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}).(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CD} \\ &= -CB^2 + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} + CD^2 \text{ car } \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \\ &= -CB^2 + CD^2\end{aligned}$$

Ainsi $AD \times BD = -CB^2 + CD^2 \Leftrightarrow AD \times BD + CB^2 = CD^2$

Exercice 2

Sur la figure ci-dessous, C est le milieu de $[AB]$ et $D \in [AB]$.

Démontrer la proposition V du Livre II des *Eléments* d'Euclide : $AD \times DB + CD^2 = AC^2$.

Correction

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB} = AD \times BD$ car $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DB}) = 0$.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} \text{ car } C \text{ est le milieu de } [AB].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}).(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC})\\ &= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AC}\\ &= -CD^2 + AC^2\end{aligned}$$

Ainsi $AD \times DB = -CD^2 + AC^2 \Leftrightarrow AD \times DB + CD^2 = AC^2$

Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, C est le milieu de $[AB]$ et $D \in [AB)$, $D \notin [AB]$.

Démontrer la proposition VIII du Livre II des *Eléments* d'Euclide : $AD^2 + DB^2 = 2(AC^2 + CD^2)$.

Correction

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$

$$\begin{aligned}
AD^2 + DB^2 &= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DB} \\
&= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})^2 + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB})^2 \\
&= AC^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} + CD^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} + CB^2 \\
&= AC^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} + CD^2 + CD^2 - 2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AC} + AC^2 \text{ car } \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AC} \\
&= 2(AC^2 + CD^2)
\end{aligned}$$