

# 15 Les vecteurs, une aventure collective

Calcul vectoriel, relation de Chasles

## Exercice 1

Sur la figure ci-dessous,  $C$  est le milieu de  $[AB]$  et  $D \in [AB)$ ,  $D \notin [AB]$ .



Démontrer la proposition VI du Livre II des *Eléments* d'Euclide :  $AD \times BD + CB^2 = CD^2$ .

### Correction

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = AD \times BD \text{ car } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} \text{ car } C \text{ est le milieu de } [AB]. \end{aligned}$$

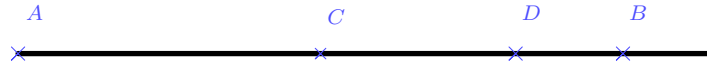
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= -CB^2 + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + CD^2 \text{ car } \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \\ &= -CB^2 + CD^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } AD \times BD = -CB^2 + CD^2 \Leftrightarrow AD \times BD + CB^2 = CD^2$$

## Exercice 2

Sur la figure ci-dessous,  $C$  est le milieu de  $[AB]$  et  $D \in [AB]$ .



Démontrer la proposition V du Livre II des *Eléments* d'Euclide :  $AD \times DB + CD^2 = AC^2$ .

### Correction

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} = AD \times DB \text{ car } (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}) = 0.$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} \text{ car } C \text{ est le milieu de } [AB]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -CD^2 + AC^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } AD \times DB = -CD^2 + AC^2 \Leftrightarrow AD \times DB + CD^2 = AC^2$$

### Exercice 3

Sur la figure ci-dessous,  $C$  est le milieu de  $[AB]$  et  $D \in [AB)$ ,  $D \notin [AB]$ .



Démontrer la proposition VIII du Livre II des *Eléments* d'Euclide :  $AD^2 + DB^2 = 2(AC^2 + CD^2)$ .

#### Correction

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\begin{aligned} AD^2 + DB^2 &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})^2 + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB})^2 \\ &= AC^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + CD^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} + CB^2 \\ &= AC^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + CD^2 + CD^2 - 2\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2 \text{ car } \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AC} \\ &= 2(AC^2 + CD^2) \end{aligned}$$