1 Pascal et Fermat

Probabilités : espérance mathématique, variable aléatoire, problème des partis

Exercice 1

Yann joue aux fléchettes. Sa cible, qu'il ne rate jamais, comporte trois secteurs (d'aire égale, avec équiprobabilité de toucher chacun des secteurs). Sur le premier secteur figure le nombre 2, sur le deuxième le nombre 0 et sur le troisième le nombre 5. Lors d'une partie, Yann lance, à chaque fois, deux fléchettes (on suppose que les deux lancers sont indépendants) ; le résultat de la partie est le produit des deux nombres obtenus. Il se demande ce que vaudra environ la moyenne des résultats obtenus s'il joue longtemps à son jeu.

Correction

Dans cet exercice, le formalisme mathématique est absent. A nous de le mettre ! La question posée (moyenne) fait penser à l'espérance mathématique. Mais quelle variable aléatoire ? Il est naturel de considérer la variable aléatoire *X* définie comme le résultat d'une partie. Commençons par déterminer les valeurs possibles de *X* : faisons un tableau à double entrée où figure le produit obtenu dans chaque partie possible, comme suit.

	Second lancer		
Premier lancer	0	2	5
0	**0**	**0**	**0**
2	**0**	**4**	**10**
5	**0**	**10**	**25**

Comme les trois secteurs sont équiprobables, et les lancers sont indépendants, la probabilité de chaque combinaison est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Il y a 5 combinaisons donnant $X = 0$, 1 donnant $X = 4$, 2 donnant $X = 10$, 1 donnant $X = 25$. D'où la loi de *X* :

Valeurs de *X*	0	4	10	*25*
Probabilités élémentaires	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Et finalement l'espérance : $E(X) = \frac{5}{9} \times 0 + \frac{1}{9} \times 4 + \frac{2}{9} \times 10 + \frac{1}{9} \times 25 = \frac{49}{9}$

[Inutile de simplifier les fractions avant un calcul d'espérance si les probabilités élémentaires sont obtenues par équiprobabilité]

Par définition de l'espérance de *X*, si Yann effectue un grand nombre de parties, la moyenne de ses résultats sera proche de $\frac{49}{9}$.

Exercice 2

Sarah propose à Sami un jeu : on lance un dé non truqué à six faces. Si le numéro sorti est 2 ou 4, Sami gagne 20 €, si le numéro sorti est impair il gagne 15 € et, si le 6 sort, Sarah gagne 50 €. Ce jeu est-il favorable à Sarah ou à Sami ?

Correction

Tout d'abord : la question posée n'a de sens que si Sami accepte de faire de nombreuses parties car sinon, on ne peut rien affirmer. Partons donc de cette hypothèse. Il est plus simple de se placer du point de vue de Sami. On appelle X la variable aléatoire qui a un numéro associe le gain algébrique de Sami en euros.

Il s'agit alors de déterminer E(X) et plus précisément son signe.

Pour cela : cherchons les valeurs de X puis sa loi. On trouve aisément :

Valeurs de X	-50	15	20
Probabilités élémentaires	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

Et finalement l'espérance : E(X) = $-50 \times \frac{1}{6} + 15 \times \frac{3}{6} + 20 \times \frac{2}{6} = \frac{35}{6}$.

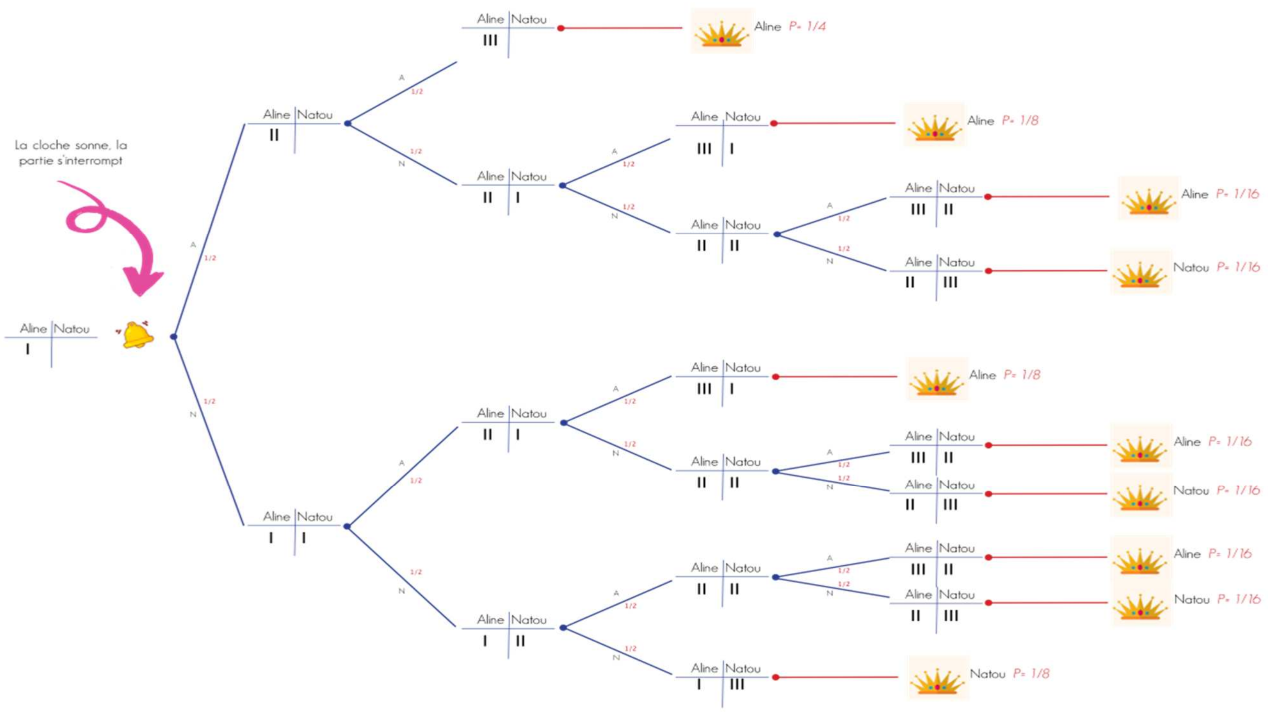
Comme E(X) > 0, le jeu est favorable à Sami. Sarah n'aurait jamais dû proposer cette règle !

Exercice 3

Aline et Natou jouent à un jeu, où elles ont la même chance de gagner à chaque manche. Elles misent chacune 32 €. La première qui totalisera trois manches gagnantes reçoit les 64 € misés. La première manche est gagnée par Aline, mais le jeu est interrompu parce que la cloche a sonné. Comment répartir les 64 € misés ?

Correction

Pour résoudre ce problème classique, qu'on appelle « problème des partis », il faut représenter les manches qui auraient eu lieu après l'interruption, si la partie avait continué jusqu'à son terme. On peut par exemple faire un arbre pondéré. Comme il y a équiprobabilité de gain à chaque manche, cela donne l'arbre suivant (en notant *A* une partie gagnée par Aline ; *N* une partie gagnée par Natou) :



L'intérêt de partir de la fin est que les gains sont répartis de manière simple en fin de partie (soit 0 € soit 64 €). Remarque : même si aucune variable aléatoire n'est introduite formellement ici, on peut utiliser la notion d'espérance de gain de manière naturelle.

Ainsi, on calcule l'espérance de gain d'Aline :

$$E(X_{Aline}) = 64 \times \frac{1}{4} + 64 \times \frac{1}{8} + 64 \times \frac{1}{16} + 64 \times \frac{1}{8} + 64 \times \frac{1}{16} + 64 \times \frac{1}{16}$$

$$E(X_{Aline}) = 64 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \right)$$

$$E(X_{Aline}) = 64 \times \frac{11}{16} = 44 \text{ €}$$

Calculons l'espérance de gain de Natou :

$E(X_{Natou}) = 64 \times \frac{1}{16} + 64 \times \frac{1}{16} + 64 \times \frac{1}{16} + 64 \times \frac{1}{8}$

$E(X_{Natou}) = 64 \times \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \right)$

$E(X_{Natou}) = 64 \times \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \right) = 20$ €

Remarque : on aurait aussi pu calculer $E(X_{Natou})$ ainsi :

$E(X_{Natou}) = 64 - E(X_{Aline}) = 20$ €