2 Al Kwarizmi

Polynôme du second degré : Résolution d'équations, étude de fonction, optimisation.

Exercice 1

L'entreprise NACRE cultive, récolte des perles de culture dans un lagon polynésien et les vend à des bijoutiers.

On note $x \in [0; 25]$ le nombre de perles récoltées et vendues chaque jour. Le coût de production est donné en euros par la fonction f définie sur $[0; 25]$ par $f(x) = x^2 - 8x + 60$.

1. (a) A combien s'élève le coût de production pour 5 perles produites ?

   (b) Pour combien de perles cultivées le coût de production est-il minimal ?

2. L'entreprise NACRE vend toutes les perles récoltées et chaque perle est vendue en moyenne 15 €.

   (a) Exprimer la recette journalière de l'entreprise NACRE en fonction du nombre de perles x.

   (b) Exprimer le bénéfice journalier de l'entreprise NACRE en fonction du nombre de perles x.

   (c) Pour combien de perles récoltées et vendues, le bénéfice de l'entreprise NACRE est-il maximal ?

   (d) Pour combien de perles récoltées et vendues, l'entreprise NACRE réalise-t-elle réellement un bénéfice ?

Correction

1. (a) $f(5) = 5^2 - 8 \times 5 + 60 = 45$. Le coût de production s'élève à 45 €.

   (b) $-\dfrac{-8}{2 \times 1} = 4$. Le coût de production est minimal pour 4 perles produites.

2. (a) La recette est donnée par la fonction R définie par $R(x) = 15x$.

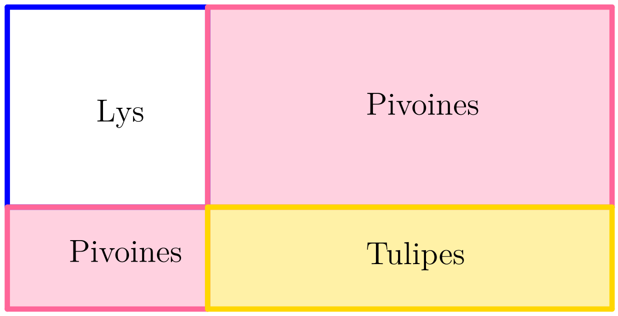
   (b) Le bénéfice est donné par la fonction B définie par $B(x) = R(x) - f(x)$.
   $B(x) = 15x - (x^2 - 8x + 60)$
   $= -x^2 + 23x - 60$.

   (c) $-\dfrac{23}{2 \times (-1)} = 11{,}5$. Le bénéfice est maximal pour 11,5 (soit 12) perles récoltées.

   (d) Résolvons $B(x) \geq 0$.
   $-x^2 + 23x - 60 \geq 0$
   $\Delta = 23^2 - 4 \times (-1) \times (-60) = 289 > 0$. $B(x)$ admet deux racines réelles.
   $x_1 = \dfrac{-23 + \sqrt{289}}{-2} = 3$; $x_1 = \dfrac{-23 - \sqrt{289}}{-2} = 20$.
   L'entreprise réalise réellement un bénéfice entre 3 et 20 perles récoltées.

Exercice 2

Charles et Léonard héritent de leur grand-père Pierre d'un champ rectangulaire de longueur 800 mètres et de largeur 400 mètres. Dans son testament, Pierre exige que Charles et Léonard doivent cultiver dans le champ des tulipes, des lys et des pivoines en le découpant comme suit en quatre rectangles de telle sorte que la partie consacrée aux lys soit un carré et que la partie consacrée aux pivoines ait l'aire la plus grande possible.



1. Quelle est l'aire de de la partie consacrée aux pivoines ?

2. Finalement, Charles et Léonard décident de ne pas respecter les dernières volontés de leur grand-père et choisissent de consacrer 100 000 m^2 aux pivoines, en conservant tout de même l'allure du découpage. Quelle sera l'aire de la partie consacrée au lys ?

Correction

1. Soit $x \in [0; 400]$ la longueur du côté de la partie carrée consacrée aux lys. L'aire de la partie consacrée aux pivoines est donc :
   $x(800 - x) + x(400 - x) = 800x - x^2 + 400x - x^2 = -2x^2 + 1200x$.
   Cette aire est maximale quand x vaut $-\dfrac{1200}{2 \times (-2)} = 300$
   $-2 \times 300^2 + 1200 \times 300 = 180000$. L'aire de la partie consacrée aux pivoines est 180000 m^2.

2. Résolvons $-2x^2 + 1200x = 100000$.
   $-2x^2 + 1200x - 100000 = 0$
   $\Delta = 1200^2 - 4 \times (-2) \times (-100000) = 640000 > 0$. Cette équation admet deux solutions réelles.
   $x_1 = \dfrac{-1200 + \sqrt{640000}}{2 \times (-2)} = 100$; $x_2 = \dfrac{-1200 - \sqrt{640000}}{2 \times (-2)} = 500 > 400$, or x ne peut excéder la largeur totale du champ.
   La partie consacrée au lys aura donc un côté de longueur 100 mètres, son aire sera donc de 10 000 m^2.

Exercice 3

Charles dit à Léonard : « Devine le nombre auquel je pense. Pour le trouver, sache que 7 augmenté du double de ce nombre est égal à l'inverse de (6 augmenté de l'opposé du triple ce nombre). Sache également que le nombre auquel je pense est positif. ».
A quel nombre pense Charles ?

Correction Soit x le nombre auquel Charles pense.
Pour le trouver, résolvons $7+2x=\dfrac{1}{6-3x}$.
Cherchons les valeurs qui annulent le dénominateur.
$6-3x=0 \Leftrightarrow x=2$. 2 est valeur interdite, donc certainement pas le nombre auquel pense Charles.

$$\begin{aligned} 7+2x=\frac{1}{6-3x} &\Leftrightarrow (7+2x)(6-3x)=1 \\ &\Leftrightarrow 42+12x-21x-6x^2=1 \\ &\Leftrightarrow -6x^2-9x+41=0 \end{aligned}$$

$\Delta=(-9)^2-4\times(-6)\times 41=1065>0$. Cette équation admet deux solutions réelles.

$x_1=\dfrac{9+\sqrt{1065}}{-12}=-\dfrac{9+\sqrt{1065}}{12}<0$

$x_2=\dfrac{9-\sqrt{1065}}{-12}=\dfrac{-9+\sqrt{1065}}{12}>0$

Charles pense au nombre $\dfrac{-9+\sqrt{1065}}{12}$.