3 Fibonacci

Etude de suites, suite arithmétique, suite géométrique, somme des termes.

Exercice 1

Pour chaque suite, calculer les trois premiers termes et étudier le sens de variation.

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = 8n^2 - 8n + 2$.
2. $v_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + 2n - 6$.
3. $w_0 = 4$, et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = (n^2 - n + 1)w_n$.

Correction

1. $u_0 = 8 \times 0^2 - 8 \times 0 + 2 = 2$.
   $u_1 = 8 \times 1^2 - 8 \times 1 + 2 = 2$.
   $u_2 = 8 \times 2^2 - 8 \times 2 + 2 = 18$.
   Le terme général de la suite (u_n) est définie par une fonction de n, qu'on note $f : n \mapsto 8n^2 - 8n + 2$.
   Pour étudier le sens de variation de (u_n), étudions le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
   Pour tout réel x positif, $f'(x) = 16x - 8$. On résout $f'(x) \geq 0$.
   $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.
   Ainsi, f est croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
   La suite (u_n) est donc croissante dès que $n \geq 1$.

2. $v_0 = 5$
   $v_1 = v_0 + 2 \times 0 - 6 = -1$.
   $v_2 = v_1 + 2 \times 2 - 6 = -3$.
   Pour étudier le sens de variation de (v_n), calculons $v_{n+1} - v_n$ et étudions le signe de cette différence.
   $v_{n+1} - v_n = v_n + 2n - 1 - v_n = 2n - 6$.
   $2n - 6 \leq 0 \Leftrightarrow n \leq 3$.
   (v_n) est croissante dès que $n \geq 3$.

3. $w_0 = 4$.
   $w_1 = (1^2 - 1 + 1)w_0 = 4$
   $w_2 = (2^2 - 2 + 1)w_1 = 12$
   Pour étudier le sens de variation de (w_n), calculons $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ et comparons ce quotient à 1.
   $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n^2 - n + 1)w_n}{w_n} = n^2 - n + 1$.
   $n^2 - n + 1 \geq 1 \Leftrightarrow n^2 - n \geq 0$.
   Si n est un entier naturel alors $n^2 \geq n$.
   Ainsi pour tout entier naturel $n^2 - n \geq 0$.
   (w_n) est croissante.

Exercice 2

Pour s'entraîner à courir pour le marathon de La Rochelle, Pierre établit le plan suivant : courir 30 minutes le premier jour puis accroître chaque jour son temps de course d'une minute.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le temps de course de Pierre au jour n. Le temps de course du premier jour est noté u_0.

1. Donner u_0, u_1, u_2.
2. Déterminer la nature de la suite (u_n). Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Combien de temps Pierre court-il au 30e jour d'entraînement ?
4. Au bout de combien de jours de course, Pierre parviendra-t-il à courir 3h30 ?
5. Pierre s'entraîne depuis un an. Combien de temps a-t-il couru au 365e jour ? Quelle part de son temps a-t-il consacrée à la course cette année ?

Correction

1. $u_0 = 30, u_1 = 30 + 1 = 31, u_2 = 31 + 1 = 32.$
2. Pour déduire un terme du précédent, on ajoute toujours le même nombre 1. (u_n) est donc une suite arithmétique de raison 1, de premier terme $u_0 = 30$.
   Pour tout entier naturel n, $u_n = 30 + 1 \times n = 30 + n$
3. Le temps de course du 30e jour correspond à u_{29}. $u_{29} = 30 + 29 \times 1 = 59$. Pierre courra 59 au 30e jour d'entraînement.
4. $3h30 = 30 + 180 = u_0 + 180 \times 1 = u_{180}$. Pierre courra 3h30 au 181e jour de course.
5. Le temps de course au 365e jour est $u_{364} = 30 + 364 = 394$. (=6h34, Pierre est largement prêt pour le marathon !)
   Sommons les temps de courses de Pierre :
   $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{364} = 365 \times \dfrac{u_0 + u_{364}}{2} = 365 \times \dfrac{30 + 30 + 364}{2} = 365 \times 212 = 77380.$
   Convertissons ce résultat en heures puis en jours : 77380 min $\approx$ 1289,7 h $\approx$ 53,7 jours.
   $\dfrac{53{,}7}{365} \approx 0{,}147 = 14{,}7\%$. Pierre a passé 14,7 % de son temps à courir cette année.

Exercice 3

La grand-mère de Charles décide de lui donner chaque mois de l'argent de poche. Elle lui donne 20 € le premier mois et augmente chaque mois cette somme de 2%.
Pour tout entier naturel n, on note v_n la somme d'argent reçue par Charles au mois n.

1. Donner v_0, v_1, v_2.
2. Déterminer la nature de la suite (v_n). Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
3. Quelle somme Charles s'attend-il à recevoir au 8e mois ?
4. Voilà 2 ans que la grand-mère de Charles lui donne de l'argent de poche et il n'a rien dépensé. Quelle somme possède-t-il ?

Correction

1. Pour augmenter de 2%, on multiplie par 1,02.
   $v_0 = 20$, $v_1 = 20 \times 1{,}02 = 20{,}4$, $v_2 = 20{,}4 \times 1{,}02 = 20{,}81$.
2. On déduit chaque terme du précédent en multipliant toujours par le même nombre 1,02. (v_n) est donc une suite géométrique de raison 1,02, de premier terme 20.
   Pour tout entier naturel n, $v_n = 20 \times 1{,}02^n$.
3. La somme du 8e mois correspond à v_7.
   $v_7 = 20 \times 1{,}02^7 = 22{,}97$. Charles s'attend à recevoir 22,97 € le 8e mois.
4. Charles a reçu de l'argent pendant 24 mois. Au 24e mois, Charles reçoit la somme v_{23}.
   Sommons les sommes d'argent reçues chaque mois par Charles.
   $v_0 + v_1 + \cdots + v_{23} = 20 \times \dfrac{1 - 1{,}02^{24}}{1 - 1{,}02} = 608{,}44$.
   Charles possède 608,44 €.