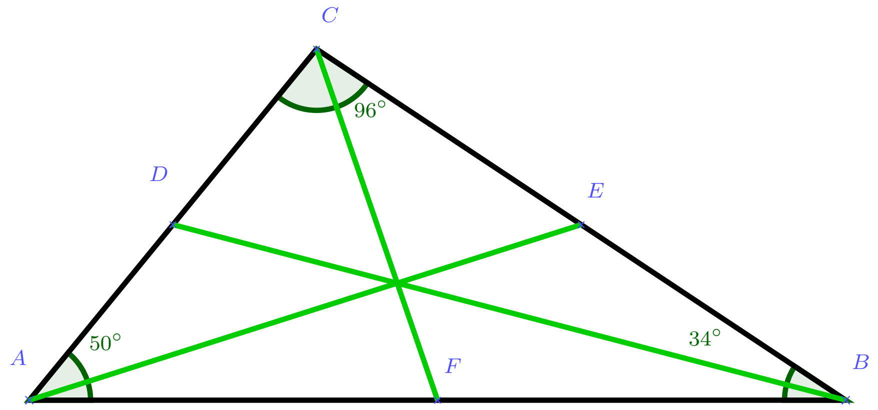
4 Al-Kashi

Théorème d'Al-Kashi, produit scalaire, résolution d'équations trigonométriques

Exercice 1

Considérons le triangle ci-dessous :



$AB = 9, BC = 7, AC = 5$. D, E, F sont les milieux respectifs de $[AC], [BC], [AB]$.

Déterminer la longueur des médianes de ce triangle.

Correction

- Dans le triangle ABE, $EB = \dfrac{7}{2}$ car E est le milieu de $[BC]$.
  D'après le théorème d'Al-Kashi,
  $$\begin{aligned} AE^2 = AB^2 + EB^2 - 2 \times AB \times EB \times \cos(\widehat{B}) &\Leftrightarrow AE^2 = 9^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \times 9 \times \frac{7}{2} \times \cos(34) \\ &\Leftrightarrow AE^2 = 81 + \frac{49}{4} - 56 \times \cos(34) \\ &\Leftrightarrow AE^2 \approx 41 \\ &\Leftrightarrow AE \approx \sqrt{41} \approx 6{,}4 \end{aligned}$$

- Dans le triangle ADB, $AD = \dfrac{5}{2}$ car D est le milieu de $[AC]$.
  D'après le théorème d'Al-Kashi,
  $$\begin{aligned} DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos(\widehat{A}) &\Leftrightarrow DB^2 = 9^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times 9 \times \frac{5}{2} \times \cos(50) \\ &\Leftrightarrow DB^2 \approx 58 \\ &\Leftrightarrow DB \approx \sqrt{58} \approx 7{,}6 \end{aligned}$$

- Dans le triangle BCF, $FB = \dfrac{9}{2}$ car F est le milieu de $[AB]$.
  D'après le théorème d'Al-Kashi,
  $$\begin{aligned} FC^2 = CB^2 + FB^2 - 2 \times CB \times FB \times \cos(\widehat{B}) &\Leftrightarrow FC^2 = 7^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 2 \times 7 \times \frac{9}{2} \times \cos(34) \\ &\Leftrightarrow FC^2 \approx 17 \\ &\Leftrightarrow FC \approx \sqrt{17} \approx 4{,}1 \end{aligned}$$

Exercice 2

Soient $A(6,-28)$, $B(14,-20)$, $C(10+4\sqrt{3},-24-4\sqrt{3})$.

1. Déterminer la norme de $\overrightarrow{AB}$ et la norme de $\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$.

Correction

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 14-6 \\ -20-(-28) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10+4\sqrt{3}-6 \\ -24-4\sqrt{3}-(-28) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4\sqrt{3} \\ 4-4\sqrt{3} \end{pmatrix}$
   $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{8^2+8^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$
   $$\begin{aligned} ||\overrightarrow{AC}|| &= \sqrt{(4+4\sqrt{3})^2+(4-4\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{16+32\sqrt{3}+48+16-32\sqrt{3}+48} \\ &= \sqrt{128} \\ &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ de deux façons.
   D'une part,
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= 8\times(4+4\sqrt{3})+8\times(4-4\sqrt{3}) \\ &= 64. \end{aligned}$$
   D'autre part,
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= ||\overrightarrow{AB}||\times||\overrightarrow{AC}||\times\cos(\widehat{BAC}) \\ &= 8\sqrt{2}\times8\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC}) \\ &= 128\cos(\widehat{BAC}) \end{aligned}$$
   Ainsi,
   $128\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 64$ donc $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}$. On en déduit $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0{,}2\pi[$ les équations suivantes.

1. $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$
2. $\tan(x) = 1$
3. $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Correction

1. Dans $\mathbb{R}$: $\sin(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   Dans $[0{,}2\pi[$: $\sin(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

2. Dans $\mathbb{R}$: $\tan(x) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

   Dans $[0{,}2\pi[$: $\tan(x) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$.

3. Dans $\mathbb{R}$: $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

   $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

   Dans $[0{,}2\pi[$: $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$