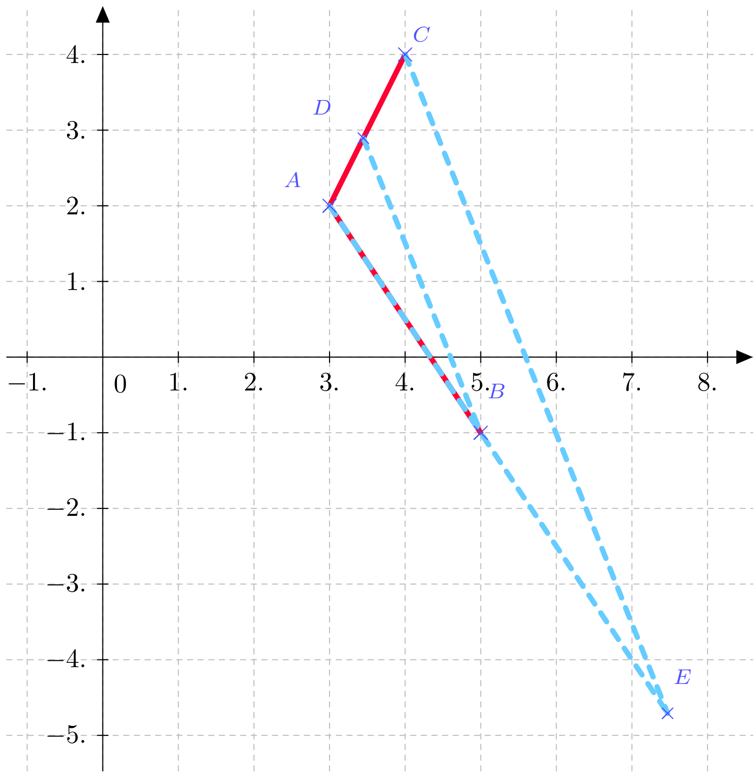
5 Descartes

Construire le produit de deux longueurs, équations de courbe

Exercice 1



Soient $A(3{,}2)$, $B(5,-1)$, $C(4{,}4)$ des points du plan représentés dans le repère ci-dessus.
D est le point de $[AC]$ tel que $AD = 1$. La parallèle à (BD) passant par C coupe (AB) en E.

1. Vérifier par la méthode de Descartes que $AE = AC \times AB$ et calculer AE.

2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E ainsi construit.

Correction

1. A,B,E et A,D,C sont alignés. $(DB)//(CE)$.
   D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE}$.
   Ainsi $AD \times AE = AC \times AB$.
   $AD = 1$ donc $AE = AC \times AB$.
   Calculons AB et AC.
   $AB = \sqrt{(3-5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{13}$; $AC = \sqrt{(3-4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$.
   $AE = \sqrt{13} \times \sqrt{5} = \sqrt{65}$.

2. A,B,E sont alignés et $AE = AC \times AB$ donc $\overrightarrow{AE} = AC \times \overrightarrow{AB}$.
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE} = \sqrt{5} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   On note (x_E,y_E) les coordonnées de E dans le repère.
   $\begin{pmatrix} x_E - 3 \\ y_E - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} \\ -3\sqrt{5} \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $x_E = 3 + \sqrt{5}$ et $y_E = 2 - 3\sqrt{5}$.
   Le point E a pour coordonnées $(3+\sqrt{5}, 2-3\sqrt{5})$.

Exercice 2

1. Déterminer la nature de la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $x^2-6x+y^2+10y-2=0$ dans le plan réel. Préciser ses caractéristiques.

2. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{E}$ et de la droite r d'équation $y-3x+4=0$ dans le plan réel.

Correction

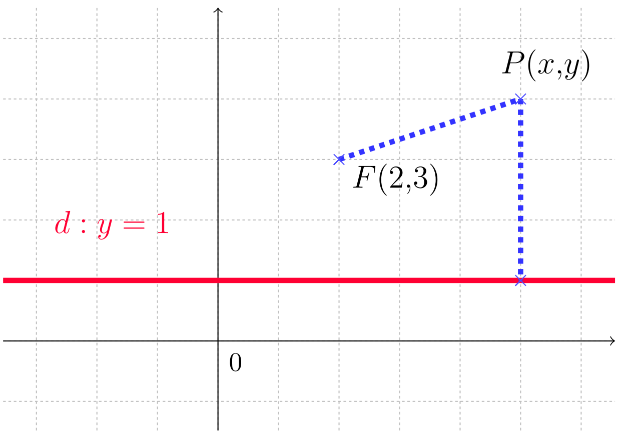
1. $$\begin{aligned} x^2-6x+y^2+10y-2=0 &\Leftrightarrow (x-3)^2-3^2+(y+5)^2-5^2-2=0\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+5)^2-36=0\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+5)^2=6^2\end{aligned}$$
   $\mathcal{E}$ est un cercle de centre $(3,-5)$ de rayon 6.

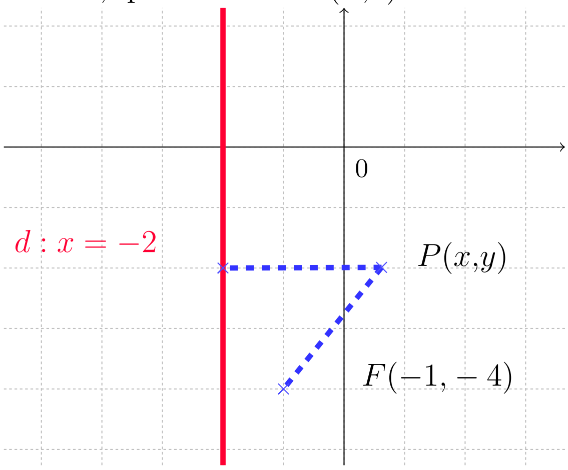
2. $$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-6x+y^2+10y-2 &=& 0\\ y-3x+4 &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2-6x+y^2+10y-2 &=& 0\\ y &=& 3x-4\end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2-6x+(3x-4)^2+10(3x-4)-2 &=& 0\\ y &=& 3x-4\end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2-6x+9x^2-24x+16+30x-40-2 &=& 0\\ y &=& 3x-4\end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 10x^2-26 &=& 0\\ y &=& 3x-4\end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 10x^2 &=& 26\\ y &=& 3x-4\end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2 &=& \dfrac{13}{5}\\ y &=& 3x-4\end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \sqrt{\dfrac{13}{5}} \text{ ou } x=-\sqrt{\dfrac{13}{5}}\\ y &=& 3\sqrt{\dfrac{13}{5}}-4 \text{ ou } y=-3\sqrt{\dfrac{13}{5}}-4\end{array}\right.$$
   Les points d'intersection de r et $\mathcal{E}$ ont donc pour coordonnées
   $\left(\sqrt{\dfrac{13}{5}}, 3\sqrt{\dfrac{13}{5}}-4\right)$ et $\left(-\sqrt{\dfrac{13}{5}}, -3\sqrt{\dfrac{13}{5}}-4\right)$

Exercice 3

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Une parabole est définie comme l'ensemble des points $P(x,y)$ situés à égale distance d'une droite nommée directrice et d'un point nommé foyer. Déterminer dans chaque cas une équation de la parabole $\mathcal{H}$ de directrice d et de foyer F.

On pourra déterminer la distance PF et la distance de P à d, qu'on notera $D(P,d)$.





Correction

$PF = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$ et $D(P,d) = y-1$.

$$\begin{aligned}
P \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow PF = D(P,d)\\
&\Leftrightarrow PF^2 = D(P,d)^2\\
&\Leftrightarrow sqrt(x-2)^2+(y-3)^{2^2} = (y-1)^2\\
&\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 = (y-1)^2\\
&\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-6y+9 = y^2-2y+1\\
&\Leftrightarrow x^2-4x+12 = 4y\\
&\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2-x+3
\end{aligned}$$

Une équation de $\mathcal{H}$ est $y = \frac{1}{4}x^2-x+3$.

$PF = \sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2}$ et $D(P,d) = x+2$.

$$\begin{aligned}
P \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow PF = D(P,d)\\
&\Leftrightarrow PF^2 = D(P,d)^2\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2}^2 = (x+2)^2\\
&\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+4)^2 = (x+2)^2\\
&\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+8y+16 = x^2+4x+4\\
&\Leftrightarrow -2x = -y^2-8y-13\\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y^2+4y+\frac{13}{2}
\end{aligned}$$

Une équation de $\mathcal{H}$ est $x = \frac{1}{2}y^2+4y+\frac{13}{2}$.