6 Galilée

Etude de trajectoire, polynômes du second degré

Exercice 1

Lors d'une bataille un boulet de canon est tiré. Une équation de sa trajectoire est donnée par $y = -0{,}0005x^2 + 0{,}2x + 0{,}5$ où x représente l'abscisse du boulet de canon et et y son ordonnée.

1. Déterminer les coordonnées initiales du boulet de canon.

2. Déterminer les coordonnées du point en lequel le boulet tombera au sol.

Correction

1. Au point initial, l'abscisse du boulet de canon est 0.
   Son ordonnée est donc $-0{,}0005 \times 0^2 + 0{,}2 \times 0 + 0{,}5 = 0{,}5$.

2. On résout $-0{,}0005x^2 + 0{,}2x + 0{,}5 = 0$.
   On calcule le discriminant $\Delta = 0{,}2^2 - 4 \times (-0{,}0005 \times 0{,}5) = 0{,}039$.
   Les racines sont : $\dfrac{-0{,}2 + \sqrt{0{,}039}}{2 \times (-0{,}0005)} \approx -424{,}5 < 0$ et $\dfrac{-0{,}2 - \sqrt{0{,}039}}{2 \times (-0{,}0005)} \approx 824{,}5 > 0$.
   L'abscisse du boulet de canon est positive donc le boulet tombe au sol au point de coordonnées $(824{,}5; 0)$.

Exercice 2

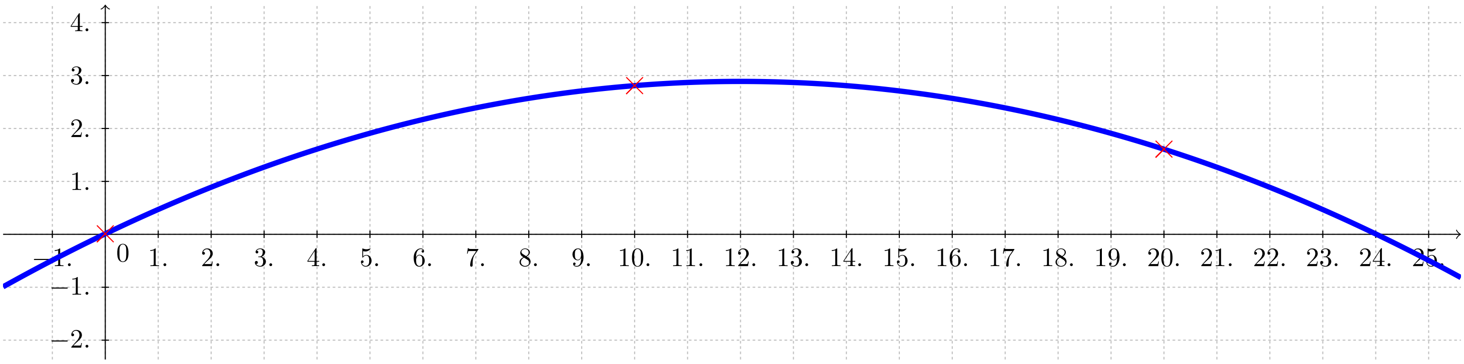
Charles frappe avec un club une balle de golf connectée, équipée d'une puce GPS. Après son lancer, une application lui indique les données suivantes :

La trajectoire est parabolique.

A 100 mètres de la position de tir, la balle a atteint une hauteur de 28,1 mètres, à 200 mètres de la position de tir, la balle a atteint une hauteur de 16,1 mètres.

La balle était initialement posée à 10 centimètres du sol.

Déterminer une équation de la trajectoire de la balle frappée par Charles dans le repère ci-dessous où une unité représente 10 mètres.



Correction D'après les données fournies par l'application de Charles, la trajectoire est une parabole à laquelle les points de coordonnées (0 ;0,01), (10 ;2,81) et (20 ;1,61) appartiennent.

Une équation de la parabole s'écrit sous la forme $y = ax^2 + bx + c$ où a,b,c sont des réels.

$0{,}01 = a \times 0 + b \times 0 + c$ donc $c = 0{,}01$.

Déterminons a,b en résolvant le système $\left\{\begin{array}{rcl} 10^2a + 10b & = & 2{,}81 \\ 20^2a + 20 & = & 1{,}61 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 100a + 10b + 0{,}01 & = & 2{,}81 \\ 400a + 20 + 0{,}01 & = & 1{,}61 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 400a + 40b + 0{,}04 & = & 11{,}24 \\ 400a + 20b + 0{,}01 & = & 1{,}61 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 20b + 0{,}03 & = & 9{,}63 \\ 400a + 20 & = & 1{,}61 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 20b & = & 9{,}6 \\ 400a + 20b + 0{,}01 & = & 1{,}61 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0{,}48 \\ 400a + 20 \times 0{,}48 + 0{,}01 & = & 1{,}61 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0{,}48 \\ 400a & = & -8 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0{,}48 \\ a & = & -0{,}02 \end{array}\right.$$

Une équation de la trajectoire de la balle est donc $y = -0{,}02x^2 + 0{,}48x + 0{,}01$

Exercice 3

Leonhard travaille dans un immense gratte-ciel situé au bord d'un lac. Le toit de ce gratte-ciel, aux touristes qui souhaitent contempler le lac. Chaque jour, depuis la fenêtre de son bureau, Leonhard voit tomber dans le lac des pièces que les touristes laisse tomber depuis le toit, pour porter bonheur. Avec son chronomètre très précis, Leonhard mesure qu'une pièce qui passe devant sa fenêtre atteint le lac (situé à l'altitude 0) 1,875 seconde plus tard. Le bureau de Leonhard se trouve au vingt-huitième étage de la tour qui en comporte 56 en tout, le toit étant le 56e étage.
Leonhard sait que l'altitude d'un objet en chute libre, simplement lâché sans vitesse initiale, se traduit par la fonction suivante :

$$f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

où t représente le temps de chute en seconde, et h la hauteur totale de la chute en mètres (ici c'est la hauteur du gratte-ciel) et g l'accélération de la pesanteur qui vaut 9,8 m.s^{-2}.
T la durée totale de la chute d'une pièce.

1. Déterminer le temps de chute total d'une pièce qui tombe du haut du gratte-ciel.

2. Déterminer la hauteur du gratte-ciel dans lequel travaille Leonhard (on pourra exprimer l'altitude de la pièce à l'instant où elle passe devant la fenêtre de Leonhard et l'altitude de la pièce au moment où elle touche le lac grâce à la fonction f.

Correction

1. Leonhard travaille au 28e étage donc à mi-hauteur, son altitude est donc $\frac{1}{2}h$.

   Quand la pièce atteint l'altitude $\frac{1}{2}h$, elle chute depuis $T - 1{,}875$ secondes.
   Ainsi $\frac{1}{2}h = -\frac{1}{2}g(T-1{,}875)^2 + h \Leftrightarrow \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}g(T-1{,}875)^2$ ($\spadesuit$).

   Quand la pièce atteint le lac, soit l'altitude 0, elle chute depuis T secondes.
   Ainsi $0 = -\frac{1}{2}gT^2 + h \Leftrightarrow h = \frac{1}{2}gT^2$ ($\clubsuit$)

   Divisons membre par membre les égalités $\clubsuit$ et $\spadesuit$

$$\frac{\frac{1}{2}h}{h} = \frac{\frac{1}{2}g(T-1{,}875)^2}{\frac{1}{2}gT} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{(T-1{,}875)^2}{T^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{(T-1{,}875)^2}{T^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{T-1{,}875}{T}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}T = T - 1{,}875$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)T = 1{,}875$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{1{,}875}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}} \approx 6{,}4$$

La chute dure 6,4 secondes en tout.

2. A l'altitude 0 mètre, une pièce chute donc depuis 6,4 secondes.

   Ainsi $0 = -\frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 6{,}4^2 + h$ donc $h = 200{,}7$ mètres.

   Le gratte-ciel mesure donc 200,7 mètres.