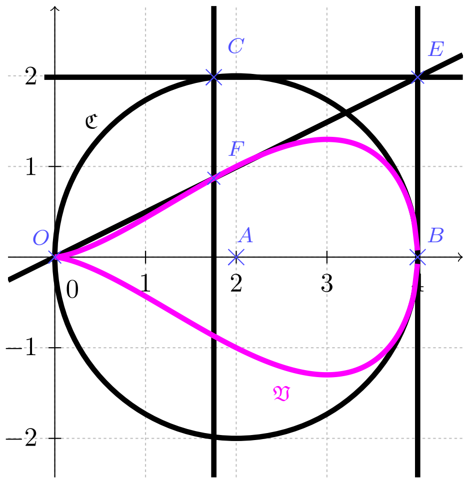
8 Agnesi

Etude de courbes

Exercice 1



Dans le repère ci-dessus, on donne les points suivants : $A(2{,}0)$, $B(4{,}0)$, $O(0{,}0)$.

- A est le centre du cercle $\mathfrak{C}$ de rayon AB
- $C \in \mathfrak{C}$, E a la même ordonnée que C
- $F \in (OE)$ et a la même abscisse que C
- (BE) est la droite d'équation $x = 4$

Quand C parcourt $\mathfrak{C}$, F parcourt $\mathfrak{V}$.
On note $(x_C{,}y_C)$ les coordonnées de C, où x_C et y_C sont des réels.

1. Déterminer une équation de $\mathfrak{C}$.
2. Déterminer les coordonnées $(x_E{,}y_E)$ de E en fonction des coordonnées de C.
3. Déterminer une équation de (OE).
4. Déterminer les coordonnées $(x_F{,}y_F)$ de F.
5. En déduire qu'une équation de $\mathfrak{V}$ est $16y^2 = x^2(4x - x^2)$.

Correction

1. Une équation de $\mathfrak{C}$ est $(x-2)^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$.
2. E a la même ordonnée que C donc $y_E = y_C$ et $E \in (BE)$ donc $x_E = 4$.
3. Le coefficient directeur de (OE) est $\dfrac{y_E}{x_E} = \dfrac{y_E}{4}$.

   Ainsi une équation de (OE) est $y = \dfrac{y_C}{4}x$.
4. F a la même abscisse que C donc $x_F = x_C$. $F \in (OE)$ donc $y_F = \dfrac{y_C}{4}x_F$.

5. $C \in \mathfrak{C}$ donc $(x_C - 2)^2 + y_C^2 = 4 \Leftrightarrow y_C^2 = 4 - (x_C - 2)^2$

$$\Leftrightarrow y_C^2 = 4x_C - x_C^2$$

On en déduit :

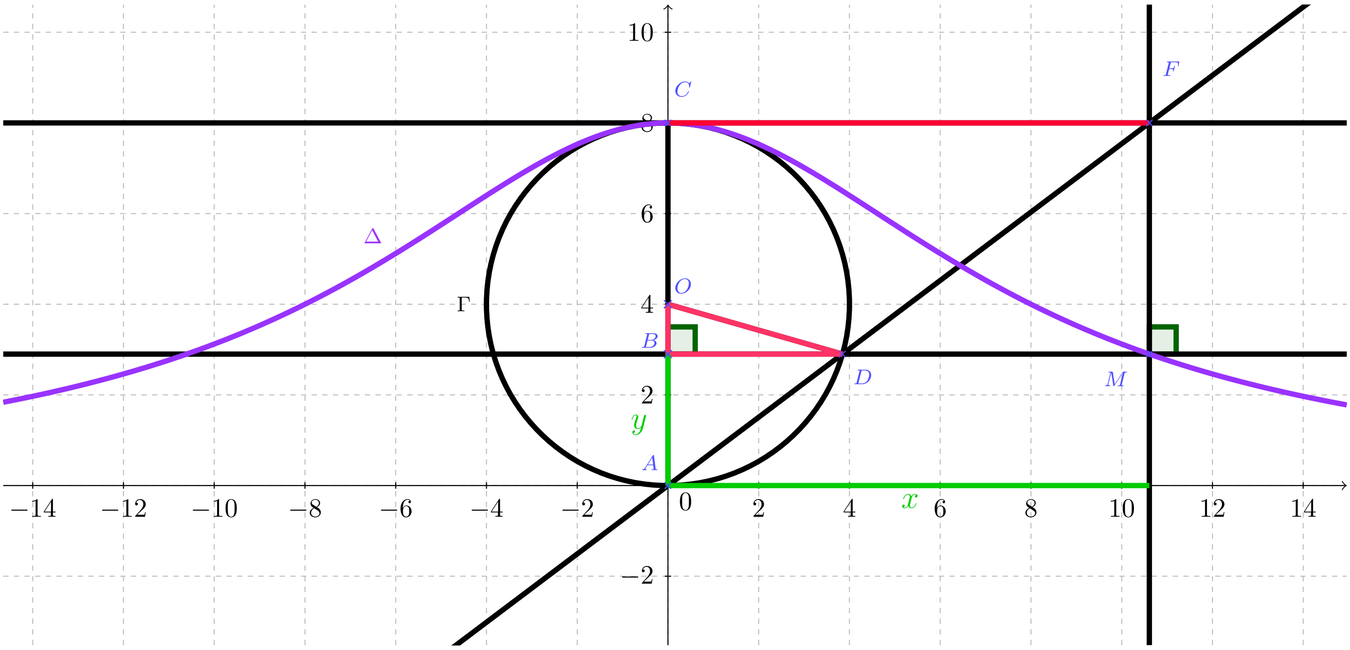
$$y_F = \frac{y_C}{4} x_F \Leftrightarrow y_F^2 = \frac{y_C^2}{16} x_F^2$$

$$\Leftrightarrow y_F^2 = \frac{4x_C - x_C^2}{16} x_F^2$$

$$\Leftrightarrow 16 y_F^2 = (4x_F - x_F^2) x_F^2 \text{ car } x_F = x_C$$

Ainsi les points qui appartiennent à $\mathfrak{V}$ vérifient l'équation $16y^2 = x^2(4x - x^2)$.

Exercice 2



Sur la figure ci-dessus :

- Γ est le cercle de centre O, de rayon 4
- $[AC]$ est un diamètre de Γ
- $B \in [AC]$.
- $D \in \Gamma$
- $(BD) \perp (AC)$
- (FC) est tangente à Γ en C
- $M \in (BD)$
- $(FM) \perp (BD)$
- Δ est la sorcière d'Agnesi correspondant au parcours du point M obtenu quand D parcourt Γ.

Déterminer une équation de Δ (on suppose $y \neq 0$).

Correction

Etablissons une relation entre x et y les coordonnées de M.
$x = BM$ et $y = AB$.

Dans le triangle OBD rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :
$OB^2 = BD^2 + OD^2 \Leftrightarrow (4-y)^2 + BD^2 = 4^2$.

Exprimons BD en fonction de x et y.
A,D,F et A,B,C sont alignés. $(BM)//(CF)$. D'après le théorème de Thalès :

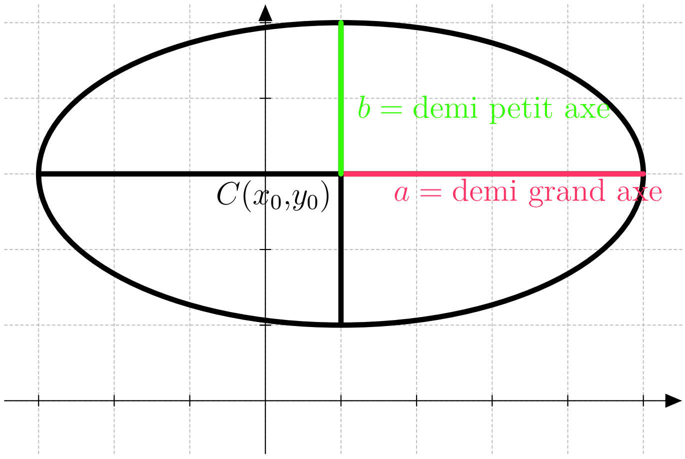
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CF} \Leftrightarrow \frac{y}{8} = \frac{BD}{x} \Leftrightarrow BD = \frac{xy}{8}$$

Ainsi, dans l'égalité de Pythagore,

$$\begin{aligned}
(4-y)^2+BD^2=4^2 &\Leftrightarrow (4-y)^2+\frac{x^2y^2}{64}=16\\
&\Leftrightarrow (4-y)^2+\frac{x^2y^2}{64}=16\\
&\Leftrightarrow 16-8y+y^2+\frac{x^2y^2}{64}=16\\
&\Leftrightarrow 16-8y+y^2+\frac{x^2y^2}{64}=16\\
&\Leftrightarrow -8y+y^2+\frac{x^2y^2}{64}=0\\
&\Leftrightarrow -8+y+\frac{x^2y}{64}=0 \text{ on divise chaque membre de l'équation par } y \text{ non nul}\\
&\Leftrightarrow y\left(1+\frac{x^2}{64}\right)=8\\
&\Leftrightarrow y\left(64+x^2\right)=512\\
&\Leftrightarrow y=\frac{512}{x^2+64}
\end{aligned}$$

Une équation de la sorcière d'Agnesi Γ est donc $y=\dfrac{512}{x^2+64}$

Exercice 3



Dans un repère orthonormé, une ellipse de centre $C(x_0,y_0)$, dont un des axes est parallèle à un axe du repère a une équation de la forme $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.
a est la longueur du demi grand axe de l'ellipse et b la longueur du demi petit axe de l'ellipse.

Considérons la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $x^2+4y^2-2x-24y+21=0$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est une ellipse. Déterminer les coordonnées de son centre et de son foyer.

2. Déterminer le point I de l'ellipse d'abscisse -1 d'ordonnée supérieure à 3.

3. Montrer que $y=3+\dfrac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+15}$ est une équation de la demi-ellipse, ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont l'ordonnée est supérieure à 3.

4. Déterminer une équation de la tangente à cette demi-ellipse au point I.

Correction

1. $$\begin{aligned} x^2+4y^2-2x-24y+21=0 &\Leftrightarrow x^2-2x+1-1+4(y^2-6y+9-9)+21=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2-1+4((y-3)^2-9)+21=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+4(y-3)^2-36+20=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+4(y-3)^2=16 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{4}=1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(y-3)^2}{2^2}=1 \end{aligned}$$
   $\mathcal{E}$ est bien une ellipse. Son centre a pour coordonnées $(1{,}3)$, la longueur de son demi grand axe est 4 et celle de son demi petit axe est 2.

2. L'abscisse de I vaut -1. Notons y son ordonnée.
   $$\begin{aligned} I\in\mathcal{E} &\Leftrightarrow (-1)^2+4y^2-2\times(-1)-24y+21=0 \\ &\Leftrightarrow 3+4y^2-24y+21=0 \\ &\Leftrightarrow 4y^2-24y+24=0 \\ &\Leftrightarrow y^2-6y+6=0 \end{aligned}$$
   Résolvons cette équation de degré 2.
   $\Delta=(-6)^2-4\times 6=12$.
   $y_1=\dfrac{6+\sqrt{12}}{2}=3+\sqrt{3}>3$ et $y_1=\dfrac{6-\sqrt{12}}{2}=3-\sqrt{3}<3$.
   Les coordonnées du point I sont $(-1{,}3+\sqrt{3})$.

3. Isolons y dans l'équation $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$ de $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{4}=1 &\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4}+(y-3)^2=4\\ &\Leftrightarrow (y-3)^2=4-\frac{(x-1)^2}{4}\\ &\Leftrightarrow (y-3)^2=\frac{16-x^2+2x-1}{4}\\ &\Leftrightarrow (y-3)^2=\frac{-x^2+2x+15}{4}\\ &\Leftrightarrow y-3=\frac{\sqrt{-x^2+2x+15}}{2}\text{ ou }-\frac{\sqrt{-x^2+2x+15}}{2}\\ &\Leftrightarrow y=3+\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+15}>3\text{ ou }3-\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+15}<3.\end{aligned}$$

   Le centre de l'ellipse a pour abscisse 1 et la longueur de son demi grand axe vaut 4. Les abscisses des points de l'ellipse sont donc dans l'intervalle $[-3{,}5]$.

   La fonction polynôme définie pour tout réel x par $-x^2+2x+15$ a pour discriminant 64 et pour racines -3 et 5. Elle est donc positive sur $[-3{,}5]$.

   $y=3+\dfrac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+15}$ est bien une équation de la demi-ellipse constituée de l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont l'ordonnée est supérieure à 3.

4. Pour tout réel $x\in]-3{,}5[$, on définit la fonction e par $e(x)=3+\dfrac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+15}$.

   Une équation de la tangente à $\mathcal{E}$ au point I est $y=e'(-1)(x+1)+3+\sqrt{3}$.

   Pour tout réel $x\in]-3{,}5[$, $e'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+15}}=\dfrac{-x+1}{2\sqrt{-x^2+2x+15}}$.

   $e'(-1)=\dfrac{-(-1)+1}{2\sqrt{-(-1)^2+2\times(-1)+15}}=\dfrac{2}{2\sqrt{12}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

   Une équation de la tangente à $\mathcal{E}$ au point I est :

$$\begin{aligned}y=\frac{1}{2\sqrt{3}}(x+1)+3+\sqrt{3} &\Leftrightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{3}}(x+1)+3+\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}+3+\sqrt{3}\end{aligned}$$