9 Héron

Approximation de racines carrées : algorithmique (méthodes de Héron, Newton, dichotomie)

Exercice 1

A la manière d'Héron, calculons une valeur approchée de racine carrée de 7.

1. Déterminer le plus petit nombre entier n_0 dont le carré est supérieur à 7.
2. Calculer la moyenne n_1 de n_0 et $\frac{7}{n_0}$. $\left(n_1 = \frac{n_0 + \frac{7}{n_0}}{2}\right)$.
3. Calculer n_1 au carré en écrivant, comme Héron, le résultat comme la somme d'un entier et d'une fraction comprise entre 0 et 1.
4. Réitérer le raisonnement avec n_1 comme nombre de départ puis jusqu'à ce que la différence entre 7 et le carré du résultat obtenu par les itérations successives soit inférieur à 10^{-9}.

Correction

1. $2^2 = 4$ et $3^2 = 9$. Ainsi $n_0 = 3$.
2. $n_1 = \frac{3 + \frac{7}{3}}{2} = \frac{9+7}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$
3. $n_1^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9} = \frac{7 \times 9 + 1}{9} = 7 + \frac{1}{9}$
4. $n_2 = \frac{\frac{8}{3} + \frac{7}{\frac{8}{3}}}{2} = \frac{\frac{8}{3} + \frac{21}{8}}{2} = \frac{64 + 63}{48} = \frac{127}{48}$.
   $n_2^2 = \left(\frac{127}{48}\right)^2 = \frac{16129}{2304} = \frac{7 \times 2034 + 1}{2304}$.
   $n_3 = \frac{\frac{127}{48} + \frac{7}{\frac{127}{48}}}{2} = \frac{\frac{127}{48} + \frac{336}{127}}{2} = \frac{16129 + 16128}{12192} = \frac{32257}{12192}$
   $n_3^2 = \left(\frac{32257}{12192}\right)^2 = \frac{1040514049}{148644864} = \frac{7 \times 148644864 + 1}{1040514049} = 7 + \frac{1}{1040514049}$.
   Ainsi $n_3 = \frac{32257}{12192}$ est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près, obtenue après 3 itérations seulement.

Exercice 2

A la manière de Newton, calculons une valeur approchée de racine carrée de 3.
Approchons la racine positive de f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5$.

1. Encadrer $\sqrt{5}$ par deux entiers successifs.
2. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x_0 = 2$.
3. Déterminer x_1 l'abscisse du point d'intersection de T_0 et l'axe des abscisse.
4. Calculer $x_1^2 - 5$.
5. Réitiérer le raisonnement précédent avec x_1 comme nombre de départ. Quelle est l'erreur (= différence entre le carré du résultat obtenu après l'itération avec x_1 et 5) ?

Correction

1. $2^2 = 4$ et $3^2 = 9$ donc $2 < \sqrt{5} < 3$.
2. Pour tout réel x, $f'(x) = 2x$. Une équation de T_0 est donc $y = f'(2)(x-2) + f(2) \Leftrightarrow y = 4x - 9$.
3. Résolvons $4x - 9 = 0$.
   $4x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$. Ainsi $x_1 = \frac{9}{4}$.
4. $\left(\frac{9}{4}\right)^2 - 5 = \frac{81}{16} - 5 = \frac{1}{16}$.
5. Une équation de T_1 est donc $y = \frac{9}{2}\left(x - \frac{9}{4}\right) + \left(\frac{9}{4}\right)^2 - 5 \Leftrightarrow y = \frac{9}{2}x - \frac{161}{16}$.
   Résolvons $\frac{9}{2}x - \frac{161}{16} = 0$.
   $\frac{9}{2}x - \frac{161}{16} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{161}{72}$. Ainsi $x_2 = \frac{161}{72}$.
   $\left(\frac{161}{72}\right)^2 - 5 = \frac{25921}{5184} - 5 = \frac{25921}{5184} - \frac{25920}{5} = \frac{1}{25920}$.
   On remarque qu'après la seconde application du raisonnement, le carré du résultat s'éloigne de moins de 10^{-4} de 5.

Exercice 3

A quoi sert l'algorithme ci-dessous ? Déterminer en l'utilisant un encadrement de racine carrée de 17 à 10^{-1} près. On pourra commencer par encadrer $\sqrt{17}$ par deux entiers successifs.

```
def f(x):
    y=x**2-17
    return(y)

def dichotomie(p,m,h):
    a=p
    b=m
    D=a-b
    while (D>h or D<-h):
        if f(a)*f((a+b)/2)<0:
            a=a
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
            b=b
        D=a-b
    return(a)
```

Correction

L'algorithme permet par itérations donner un encadrement d'une racine du polynôme f. A chaque étape, on précise l'encadrement en remplaçant une des bornes de l'encadrement par la moyenne des bornes suivant le signe du produit de l'image de cette moyenne par l'image de a. $4^2 = 16$ et $5^2 = 25$ donc $4 < \sqrt{17} < 5$. Appliquons l'algorithme pour $p = 4, m = 5, h = 0{,}1$.

a	b	$D = a - b$	$\frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	Signe de $f(a) * f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
4	5	-1	$\frac{9}{2}$	-1	$\frac{13}{4}$	-
4	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{17}{4}$	-1	$\frac{17}{16}$	-
4	$\frac{17}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{33}{8}$	- 1	$\frac{1}{64}$	-
4	$\frac{33}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{65}{16}$	-1	$-\frac{127}{256}$	+
$\frac{65}{16}$	$\frac{33}{8}$	$-\frac{1}{16}$				

$\left|-\frac{1}{16}\right| < 10^{-1}$ donc $\frac{65}{16} < \sqrt{17} < \frac{33}{8}$ est un encadrement de racine carrée de 17 à 10^{-1} près.