

Centre de gravité d'un triangle

Rappel : milieu d'un segment

Soient B et C deux points du plan,

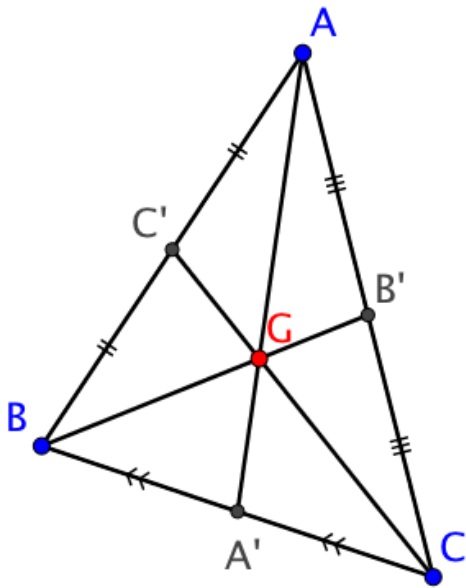
A' est le milieu de $[BC]$ si et seulement si $\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ce qui est équivalent à dire en utilisant la relation de Chasles que $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$

Définition :

Soit ABC un triangle, il existe un point du plan, noté G , et un seul, tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Ce point est appelé **le centre de gravité du triangle**.



1. Point de concours des médianes

On réécrit cette égalité en faisant apparaître le point A dans les deux derniers vecteurs par la relation de Chasles.

Cela devient alors

$$\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

En regroupant les $\overrightarrow{GA}$ on a alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

Enfin, en faisant apparaître le milieu de $[BC]$, c'est à dire A' on trouve :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'B})$$

Or $(\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'B})$ par définition car A' est le milieu du segment.

On obtient ainsi **une propriété importante** :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}$$

De même, on trouve :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BB'}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CC'}$$

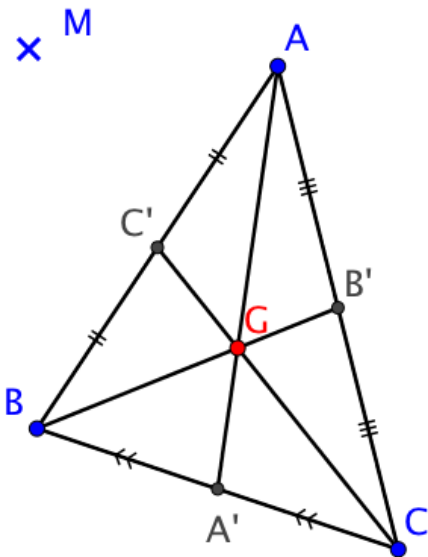
Cela signifie donc que le point G est situé au $\frac{2}{3}$ des médianes du triangle en partant des sommets.

Il appartient donc aux trois médianes du triangle, qui sont concourantes en un seul point : c'est donc le centre de gravité G .

2. Valeur minimale de $MA^2 + MB^2 + MC^2$

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité.

A tout point M du plan on associe le réel $MA^2 + MB^2 + MC^2$



Par exemple, si $M = A$, on obtient l'égalité suivante : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = AB^2 + AC^2$.

On cherche à présent le point M rendant minimal le réel $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Or $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2$. On réécrit donc la fonction f en écrivant des vecteurs.

$$f(M) = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$$

On applique à présent la propriété de Chasles en introduisant le point G :

$$f(M) = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

On peut ensuite appliquer les formules de développement des identités remarquables.

$$\text{Donc, } f(M) = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$\text{Or par définition, } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{Ainsi, } f(M) = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$$

La quantité $\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$ est fixe, seul le terme $3MG^2$ est variable.

De plus, $3MG^2 \geq 0$, donc en ajoutant $\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$ des deux côtés on trouve :

$$f(M) \geq \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$$

On vient de trouver un minorant de la fonction f .

Il reste à déterminer si il existe une valeur de M pour laquelle la fonction f est égale à ce minorant qui serait alors le minium de la fonction.

On remarque que $f(M) = \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$ lorsque le terme $3MG^2$ est nul, ou encore que $GM = 0$ ce qui signifie que $M = G$.

Conclusion :

La fonction f est minimale lorsque M est confondu avec le centre de gravité G et elle vaut alors $GA^2 + GB^2 + GC^2$.