Factorisation d'un polynôme du second degré

Rappels

Soit P un polynôme du second degré définit pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c trois réels ($a \neq 0$).

Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a(x - x_0)^2$ avec x_0 la racine double de P .

Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec x_1 et x_2 les racines distinctes de P .

Si $\Delta < 0$ alors P n'admet pas de forme factorisée.

Propriétés

1) Si $\Delta > 0$ alors $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ et $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$.

2) Si $a + b + c = 0$, alors 1 est une racine du polynôme.

Exemple

On suppose que $P(x) = -2x^2 - 4x + 6$.

On remarque ici que $a + b + c = -2 - 4 + 6 = 0$, donc 1 est une racine du polynôme.

Or $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -3$. Ainsi $1 \times x_2 = x_2 = -3$.

Ainsi, la forme factorisée de P est $P(x) = -2(x-1)(x-(-3)) = -2(x-1)(x+3)$.

3) Si $c = 0$ alors 0 est une racine du polynôme car $P(x) = x(ax+b)$ dans ce cas.

Exemple

On suppose ici que $P(x) = 3x^2 - 4x$.

On remarque que $c = 0$, donc $P(0) = 0$.

En outre, on sait que $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$.

Ainsi $x_1 + x_2 = 0$ donc $x_2 = \frac{4}{3}$.

Finalement, la forme factorisée de P est $P(x) = 3x\left(x - \frac{4}{3}\right)$.

4) Si $b = 0$, on peut essayer de factoriser avec une égalité remarquable

Exemple

On suppose qu'ici $P(x) = 2x^2 - 8$.

On remarque que $b = 0$.

On peut alors factoriser ici par 2 puis utiliser une identité remarquable.

$P(x) = 2(x^2 - 4) = 2(x-2)(x+2)$.

5) Reconnaitre une égalité remarquable

Exemple

On suppose enfin que $P(x) = 2x^2 - 4x + 2$.

On calcule tout d'abord Δ et on trouve $\Delta = 0$.

Cela signifie que l'on peut utiliser une identité remarquable pour factoriser directement le polynôme.

On commence par factoriser par 2 :

$$P(x) = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x - 1)^2.$$