Factorisation d'un polynôme du troisième degré

Propriété

Soit P un polynôme du troisième degré défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c, d des réels ($a \neq 0$).

Si x_0 est une racine du polynôme ($P(x_0) = 0$) alors P se factorise sous la forme suivante

$P(x) = (x - x_0) \times Q(x)$ avec Q un polynôme du second degré.

Exemple

Soit P un polynôme du troisième degré défini par $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$.

On cherche à écrire ce polynôme sous la forme $(x - x_0) \times Q(x)$ où x_0 est une racine évidente.

On remarque ici que la somme des coefficients vaut 0 : ($1 + 2 + 1 - 4 = 0$), ainsi 1 est une racine évidente.

On peut donc écrire P sous la forme $P(x) = (x - 1) \times Q(x)$.

Comme Q est un polynôme du second degré, il s'écrit sous la forme $a'x^2 + b'x + c'$, avec a', b', c' trois réels ($a' \neq 0$) qu'il s'agit de déterminer.

Pour déterminer la valeur des coefficients, la méthode consiste tout d'abord à développer le polynôme factorisé.

$$P(x) = (x-1)(a'x^2 + b'x + c')$$

$$P(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x - a'x^2 - b'x - c'$$

On regroupe ensuite les coefficients semblables.

$$P(x) = a'x^3 + (b' - a')x^2 + (c' - b')x - c'$$

Or deux polynômes de même degré sont égaux si les coefficients sont égaux.

On peut donc écrire le système d'égalité suivant par égalité des coefficients entre le polynôme P initial et la nouvelle égalité précédente :

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1 & = & a' \\ 2 & = & b' - a' \\ 1 & = & c' - b' \\ -4 & = & -c' \end{array}\right.$$

On trouve alors que $\left\{\begin{array}{l} a' = 1 \\ b' = 3 \\ c' = 4 \end{array}\right.$

Finalement on peut écrire P sous la forme $P(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 4)$.

En développant ce polynôme, on retrouve l'écriture initiale de ce dernier.

Remarques

1) Lorsque $d = 0$, le polynôme peut se factoriser par x et on obtient donc directement la factorisation.

Exemple

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x = x(x^2 - 3x + 5)$

2) Lorsque l'énoncé demande de chercher une racine évidente, il s'agit d'utiliser sa calculatrice pour calculer le polynôme en certaines valeurs ($-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$).

Exemple

$P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 28x - 48$

On trouve à l'aide de la calculatrice que -2 est une racine, c'est à dire $P(-2) = 0$.

Ainsi, P s'écrit sous la forme $P(x) = (x - (-2))Q(x) = (x + 2)Q(x)$.

On prendra ainsi garde au fait que la factorisation s'écrit $(x - x_0)$ et on utilisera ainsi des parenthèses pour ne pas se tromper.