Opérations et dérivées

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I .

1) Dérivée d'une somme

La dérivée d'une somme de fonctions est égale à la somme des dérivées de chaque fonction : c'est à dire

$(u+v)' = u' + v'$.

Par exemple $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Il faut **dans un premier temps chercher le domaine de définition et l'ensemble de dérivabilité**.

La fonction $u(x) = x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $v(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2x + \dfrac{-1}{x^2}$.

2) Dérivée du produit d'une fonction par un réel k

La formule est la suivante : $(ku)' = k \times u'$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple, on souhaite déterminer la dérivée de $f(x) = -2x^2$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi:

pour tout réel x , $f'(x) = -2 \times (2x) = -4x$.

3) Dérivée de l'inverse d'une fonction

La formule est $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ pour tout $x \in I$ et il faudra veiller à ce que $v(x) \neq 0$.

Exemple, considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$:

Pour tout réel x différent de $-1,\ f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$.

4) Dérivée du produit de deux fonctions

La dérivée d'un produit est donnée par la formule suivante :

$(uv)' = uv' + u'v$.

Exemple : Soit $f(x) = (3x+1) \times \sqrt{x}$,

la fonction $x \mapsto 3x+1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 3 \times \sqrt{x} + (3x+1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5) Dérivée du quotient de deux fonctions

La dérivée d'un quotient est $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. La fonction v ne s'annulant pas.

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$,

Pour tout x différent de 4 ,

$f'(x) = \dfrac{2(x-4) - (2x+1) \times 1}{(x-4)^2}$.

$$f'(x) = \frac{-9}{(x-4)^2}.$$