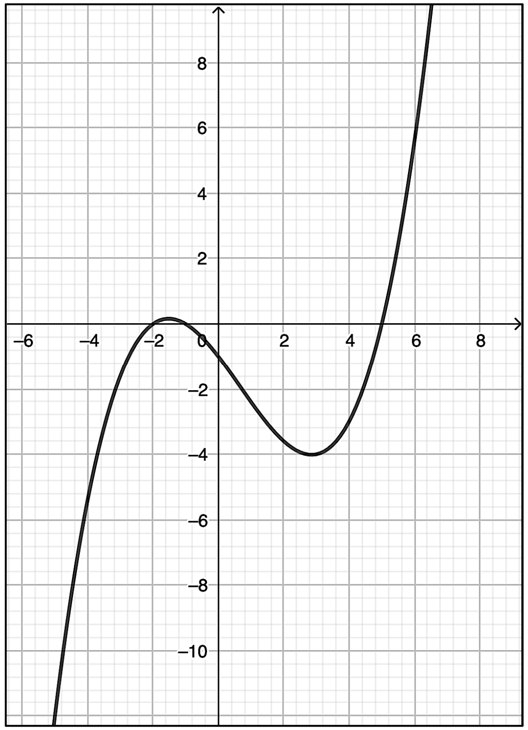
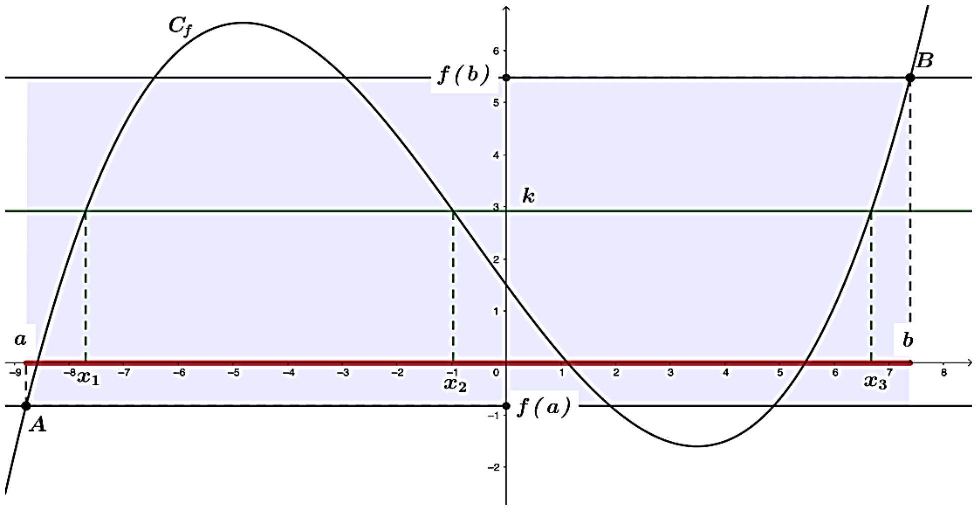
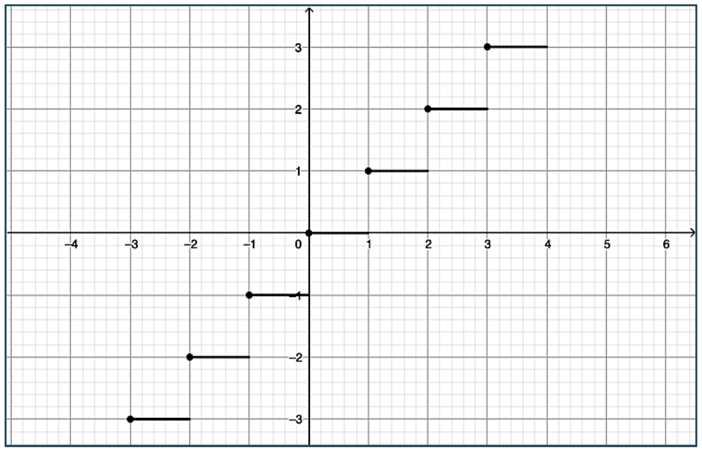
Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

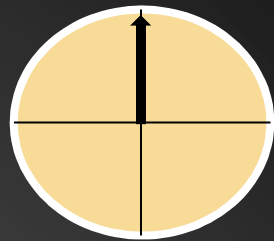






QUESTIONS FLASH

QUESTION 1



Calculer les deux limites suivantes :

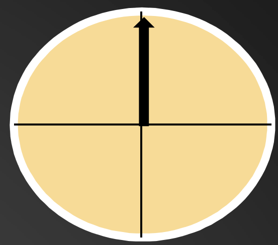
1. $\lim\limits_{x \to -1} x^2 - x + 2$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{x-3}{x-2}$

QUESTION 2

Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x}$

QUESTION 3



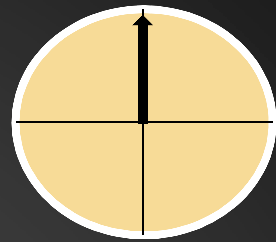
On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;10]$.

x	-10		0		3		10
$f(x)$	-5	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	8

Donner le nombre de solutions des équations suivantes :

- $f(x) = 0$
- $f(x) = -3$
- $f(x) = -6$

QUESTION 4



A partir de la table de valeurs ci-contre construite à partir de la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x \ln x,$$

donner une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 10$.

X	Y
5	8,04718956
5,1	8,30912675
5,2	8,57302485
5,3	8,83884615
5,4	9,10655435
5,5	9,37611451
5,6	9,64749295
5,7	9,9206572
5,8	10,1955759
5,9	10,4722189
6	10,7505568

CORRECTION

QUESTION 1

Calculer les deux limites suivantes :

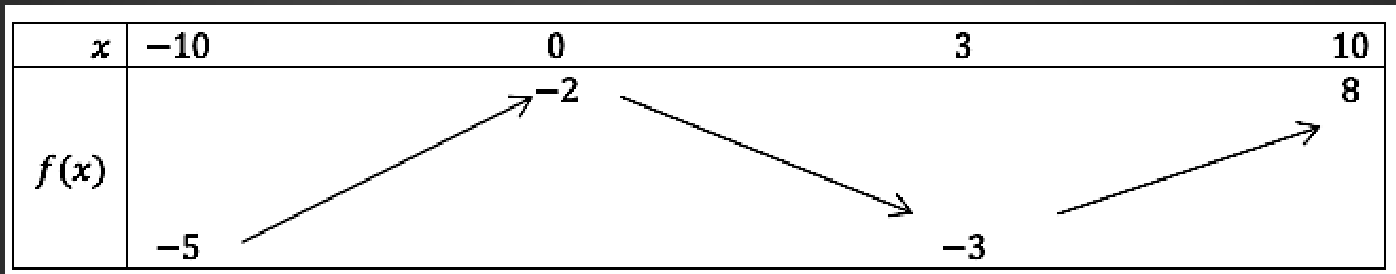
1. $\lim\limits_{x \to -1} x^2 - x + 2$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{x-3}{x-2}$

QUESTION 2

Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x}$

QUESTION 3

On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;10]$.



Donner le nombre de solutions des équations suivantes :

- $f(x) = 0$
- $f(x) = -3$
- $f(x) = -6$

QUESTION 4

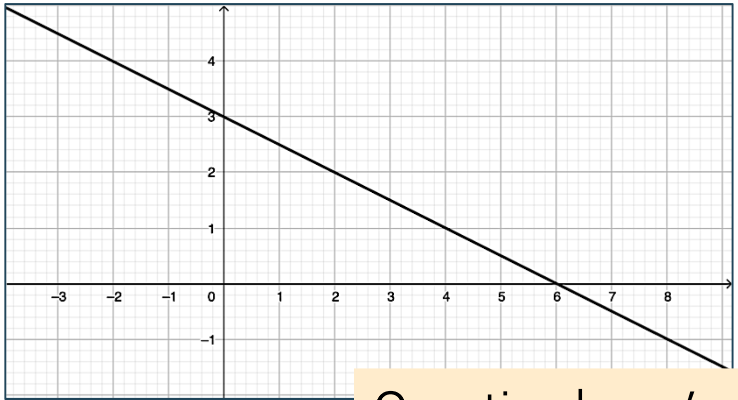
À partir de la table de valeurs ci-contre construite à partir de la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

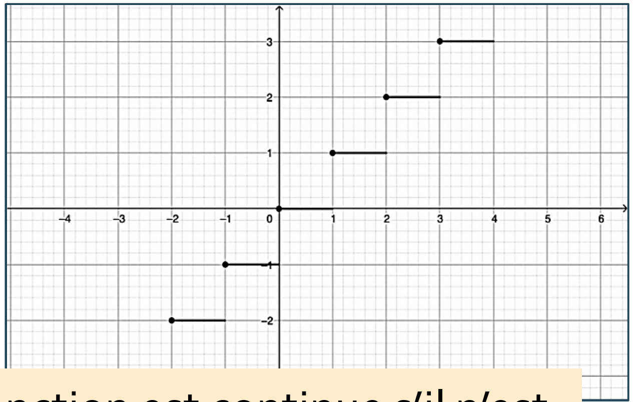
$$f(x) = x \ln x,$$

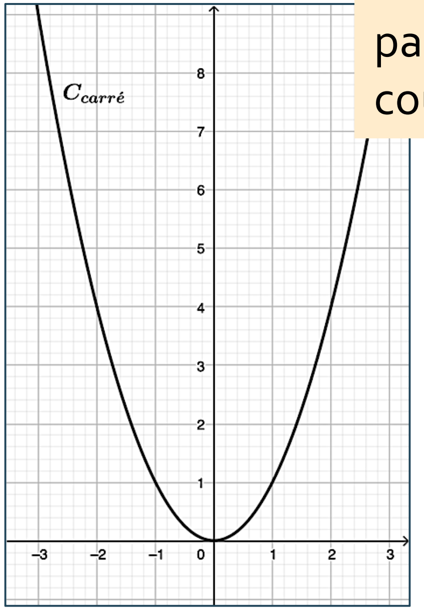
donner une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 10$.

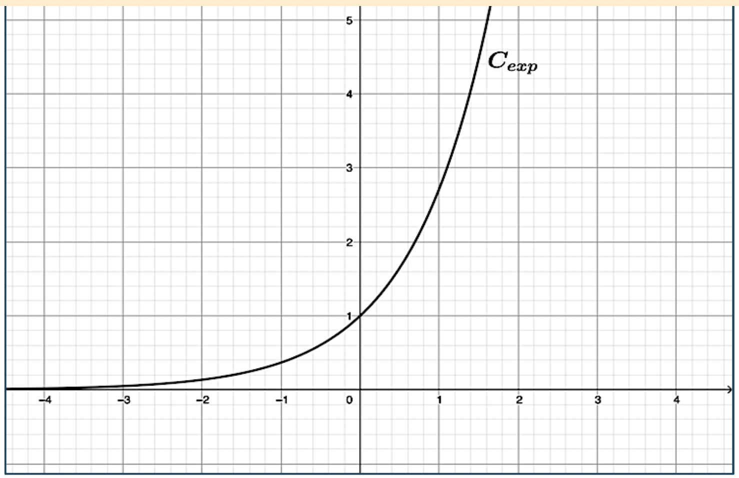
X	Y
5	8,04718956
5,1	8,30912675
5,2	8,57302485
5,3	8,83884615
5,4	9,10655435
5,5	9,37611451
5,6	9,64749295
5,7	9,9206572
5,8	10,1955759
5,9	10,4722189
6	10,7505568

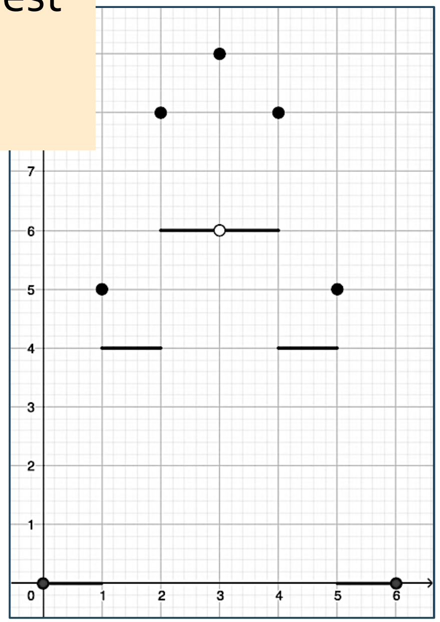
Continuité : approche graphique







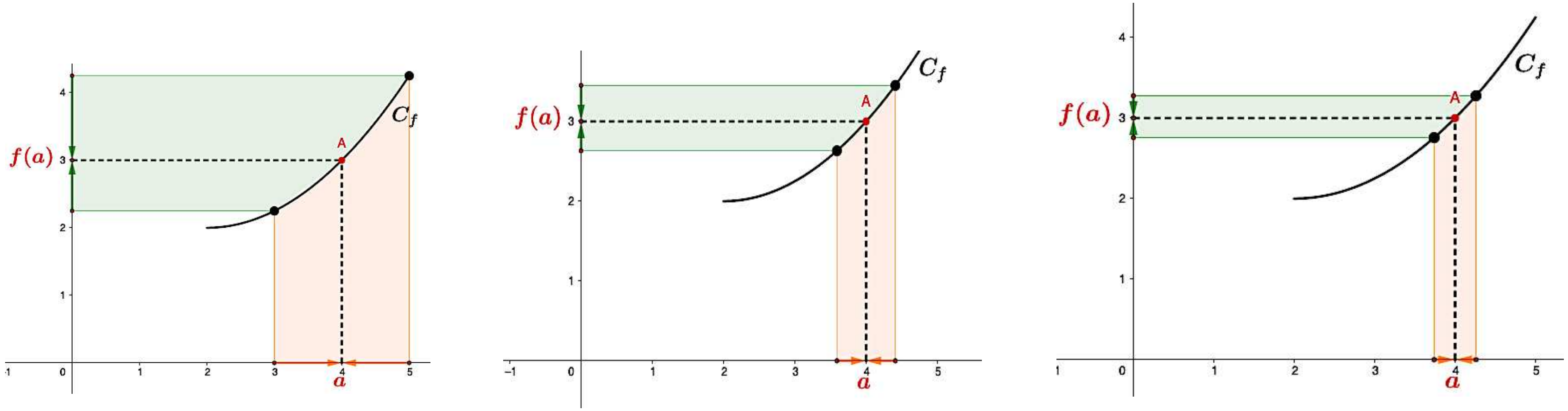


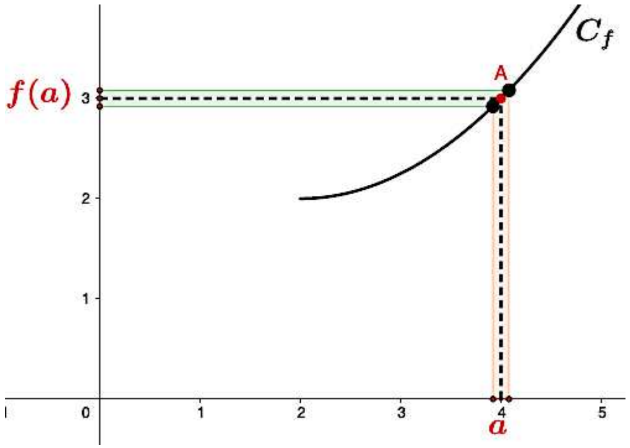


On retiendra qu'une fonction est continue s'il n'est pas nécessaire de lever le crayon pour tracer sa courbe représentative.

Continuité

On a représenté ci-dessous une fonction continue sur un intervalle et on observe ce qui se passe quand on se rapproche de a.





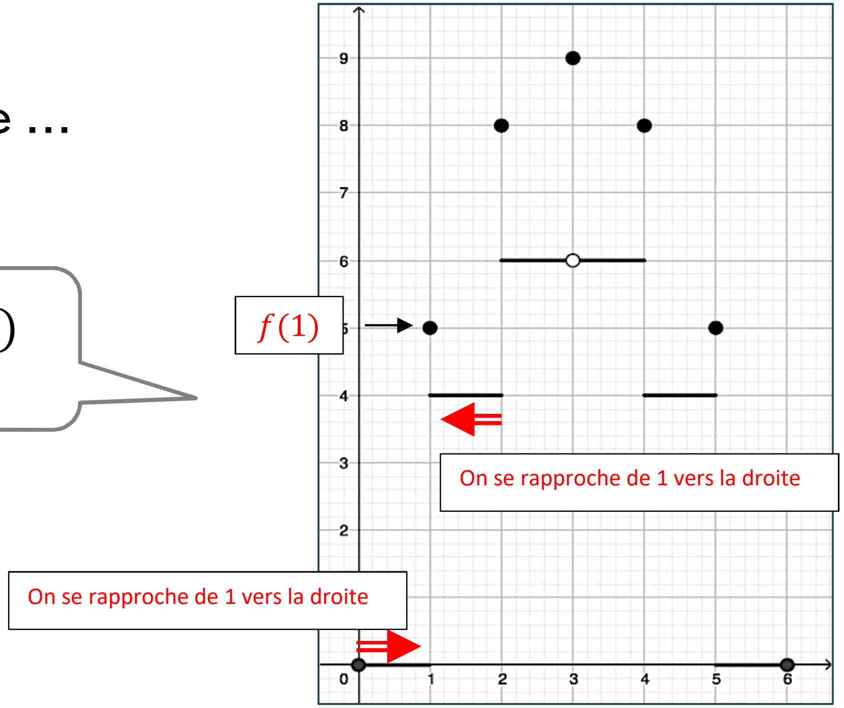
Si f est continue en a, plus on se rapproche de a et plus $f(x)$ se rapproche de $f(a)$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Continuité

Un exemple de fonction non continue …

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) \neq f(1)$$



Définition

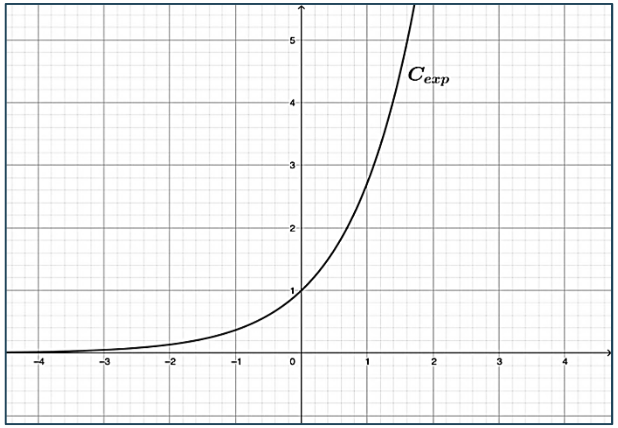
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a.

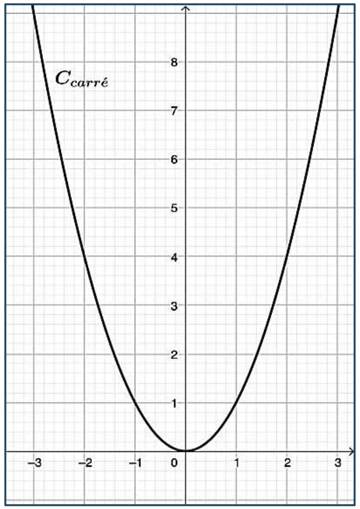
f est continue en a si et seulement si $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$

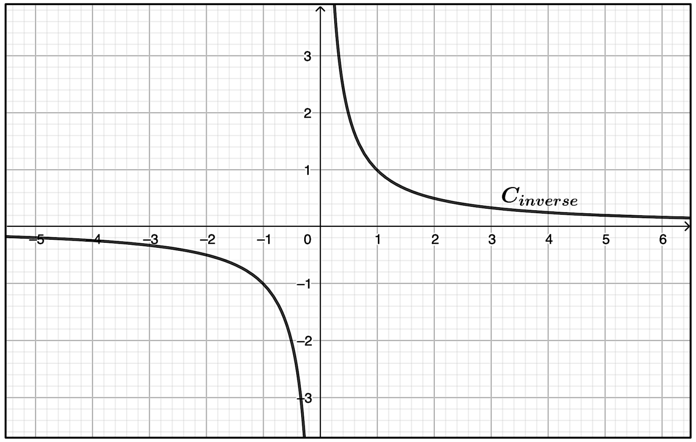
La fonction f est continue sur I si et seulement si f est continue pour tout x appartenant à I.

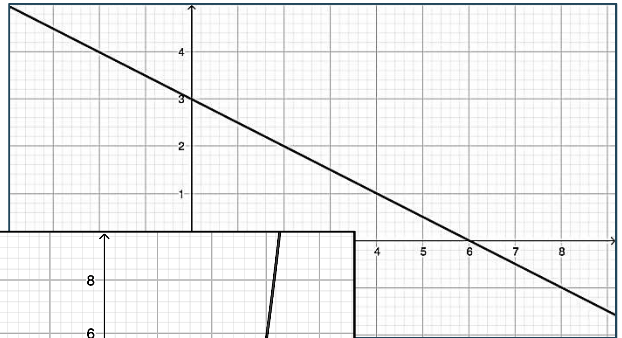
Continuité

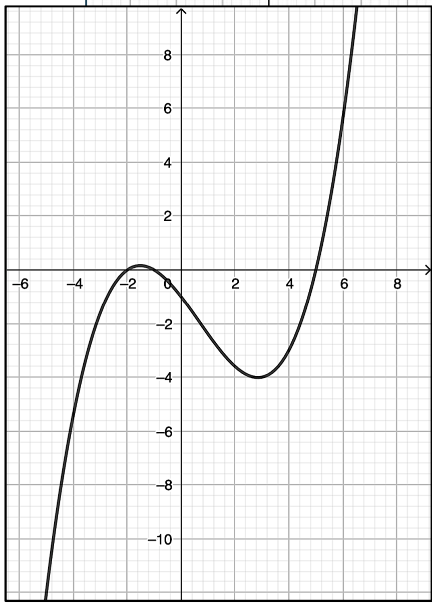
Toutes les fonctions usuelles que l'on a déjà étudiées sont continues sur leur ensemble de définition : les fonctions affines, les fonctions polynômes, la fonction inverse, la fonction exponentielle …

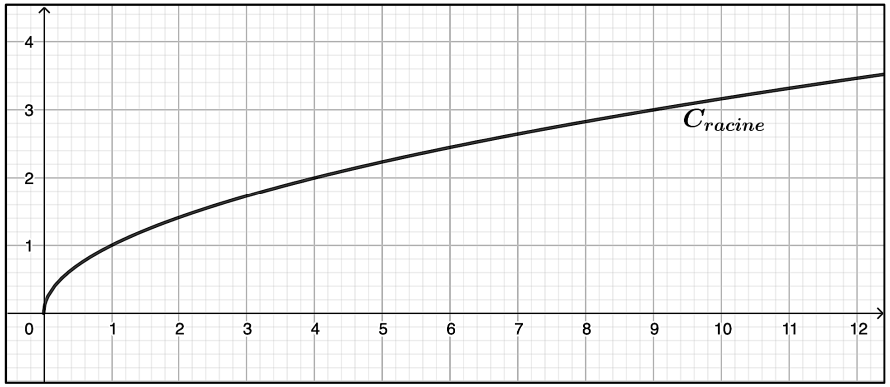






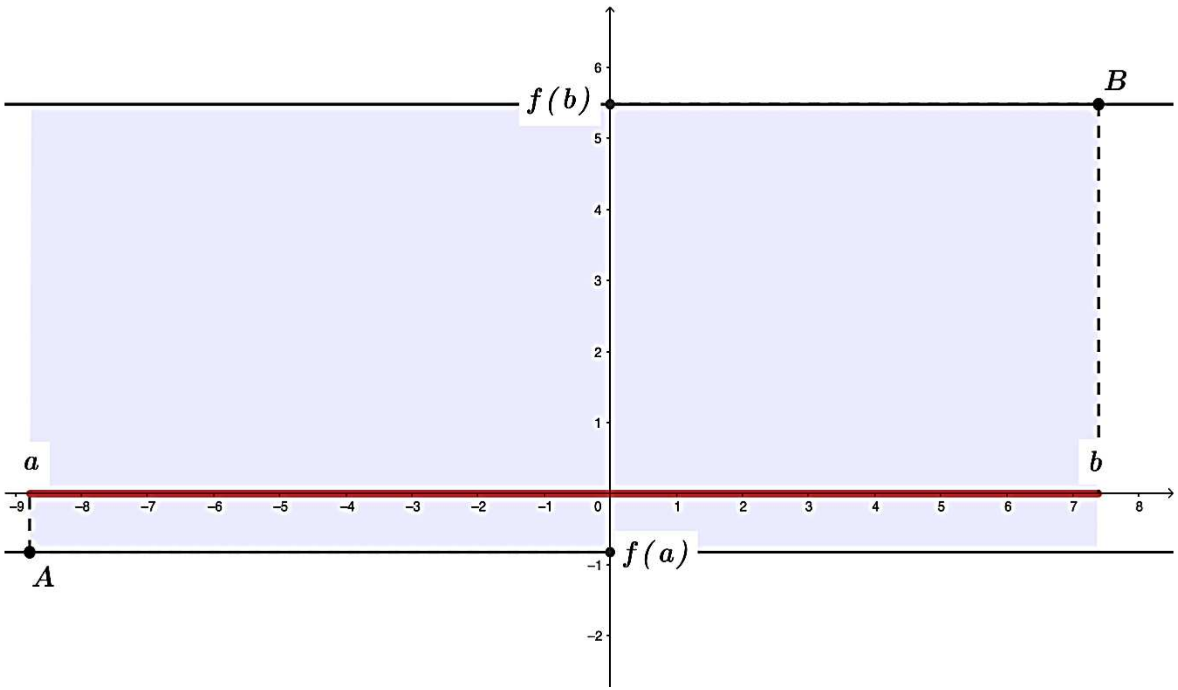






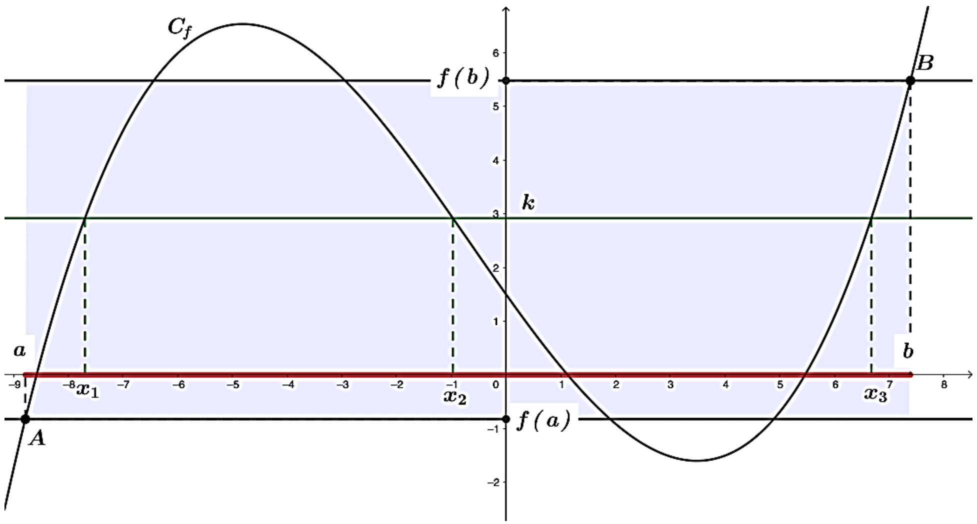
Le théorème des valeurs intermédiaires

Les seules hypothèses dont je dispose : f est continue sur $[a\,;b]$ et je connais les valeurs de $f(a)$ et $f(b)$.
Impossible de tracer une courbe susceptible de représenter f sans passer au moins une fois par toutes les ordonnées comprises entre $f(a)$ *et* $f(b)$.



Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (*admis*)
Soit f **une fonction continue sur un intervalle** $[a\,;\,b]$**.**
Quel que soit le réel k **compris entre** $f(a)$ **et** $f(b)$**,** il existe **au moins un** $x_0 \in [a\,;b]$ **tel que** $f(x_0) = k$**.**



Le théorème des valeurs intermédiaires

Cas particulier : f **est continue et strictement monotone sur** $[a\,;b]$**.**

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires
Soit f **une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle** $[a\,;\,b]$**.**
Quel que soit le réel k **compris entre** $f(a)$ **et** $f(b)$ il existe **un unique** $x_0 \in [a\,;b]$ **tel que** $f(x_0) = k$**.**

1[er] **cas :** f strictement croissante

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ ↗	k	↗ $f(b)$

2[ème] **cas :** f strictement décroissante

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ ↘	k	↘ $f(b)$

Par convention une flèche « qui monte » ou « qui descend » dans un tableau de variations signifie que la fonction est **continue** et **strictement monotone**.

Le théorème des valeurs intermédiaires

Application directe

f est une fonction continue sur $[-2\,;5]$.
$f(-2) = 1$ et $f(5) = 4$
L'équation $f(x) = 3$ possède -t-elle des solutions ?

f est une fonction continue et strictement croissante sur $[-2\,;5]$.
$f(-2) = 1$ et $f(5) = 4$
L'équation $f(x) = 3$ possède -t-elle des solutions ?

Approcher une solution du type $f(x) = 0$

Activité

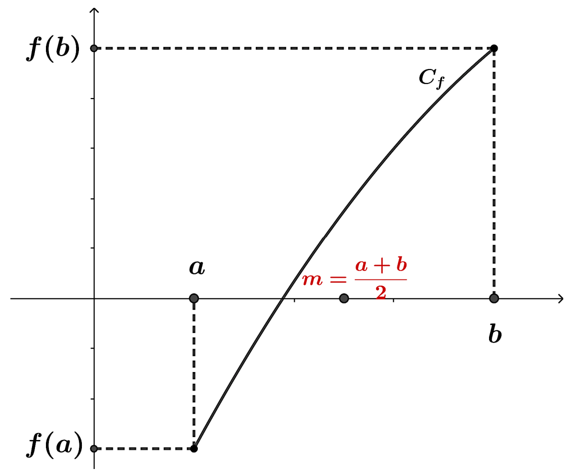
f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$

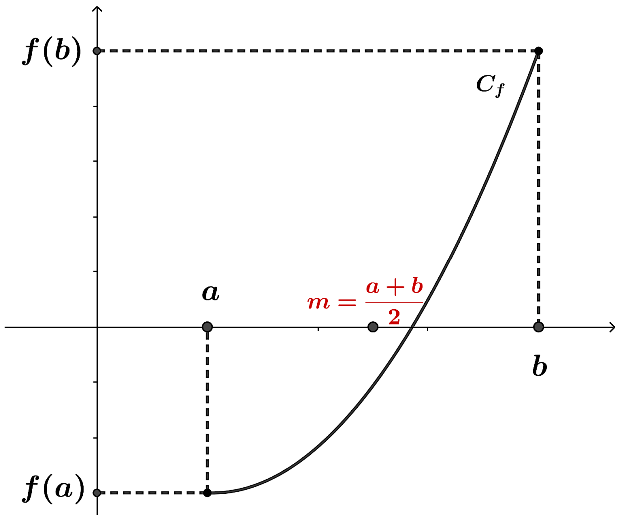
$f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $[a; b]$ que l'on appellera x_0. On a donc $x_0 \in [a\,; b]$.

On appelle m le réel $\frac{a+b}{2}$; il se situe au milieu de l'intervalle $[a\,; b]$

Approcher une solution du type $f(x) = 0$

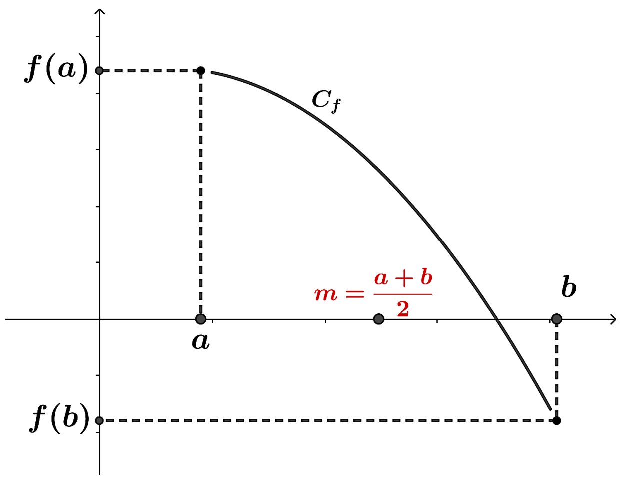


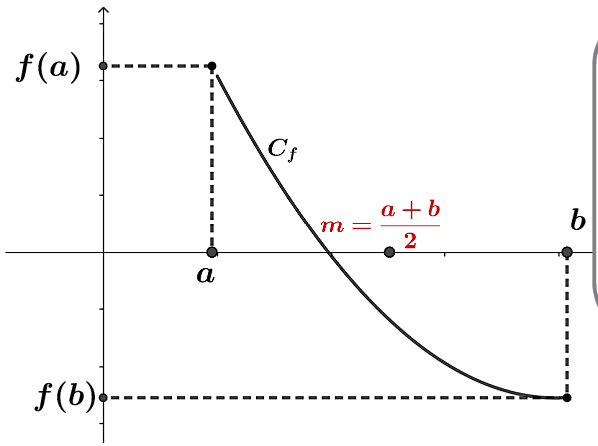


Pour chaque cas, répondre aux questions suivantes :

Quel est le signe de $f(a) \times f(m)$?

Dans quel intervalle, deux fois plus petit que $[a\,;b]$ se situe la solution x_0 ?





Que nous a permis d'obtenir cette première étape ?
Que pourrions-nous imaginer pour trouver un intervalle encore plus petit contenant la solution x_0 ?

Algorithme de dichotomie

```
from math import *

def f(x) :
    return ............

def dichotomie (a,b,n) :
    while b-a>10**(-n) :
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)>0 :
            a=......
        else :
            b=......
    return a,b
```

Algorithme de dichotomie

Application directe

Montrer que l'équation $e^x + x = 5$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0\,;3]$; puis en donner une valeur approchée.

Par dichotomie

```
from math import *

def f(x) :
    return ............

def dichotomie (a,b,n) :
    while b-a>10**(-n) :
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)>0 :
            a=......
        else :
            b=......
    return a,b
```

```
>>> dichotomie(0,3,1)
(1.21875, 1.3125, 5)

>>> dichotomie (0,3,2)
(1.30078125, 1.306640625, 9)
```

Par balayage

1	X	Y
2	0	1
3	0,1	1,20517092
4	0,2	1,42140276
5	0,3	1,64985881
6	0,4	1,8918247
7	0,5	2,14872127
8	0,6	2,4221188
9	0,7	2,71375271
10	0,8	3,02554093
11	0,9	3,35960311
12	1	3,71828183
13	1,1	4,10416602
14	1,2	4,52011692
15	1,3	4,96929667
16	1,4	5,45519997
17	1,5	5,98168907
18	1,6	6,55303242
19	1,7	7,17394739
20	1,8	7,84964746
21	1,9	8,58589444
22	2	9,3890561
23	2,1	10,2661699

EXERCICES

EXERCICE 1

Démontrer que l'équation $x^3 - x^2 - 1 = 0$ **admet une unique solution** dans $\mathbb{R}$.

On donnera une valeur approchée de la solution à 10^{-2}près.

CORRECTION 1

Démontrer que l'équation $x^3 - x^2 - 1 = 0$ **admet une unique solution** dans $\mathbb{R}$.

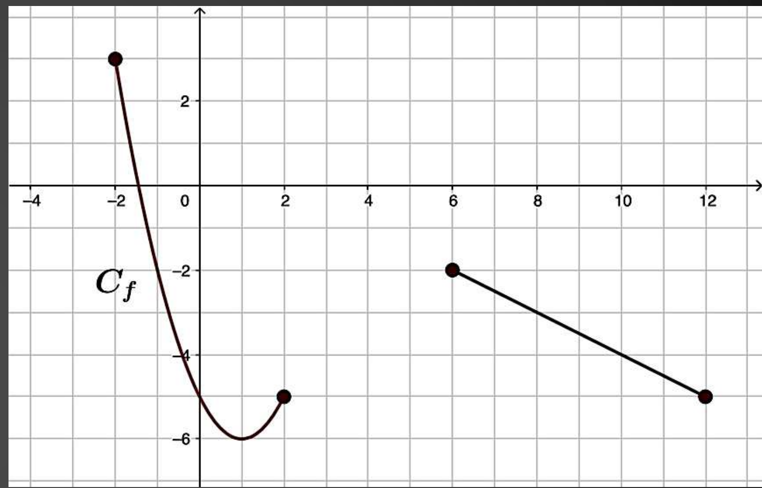
x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{31}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

```
>>> dichotomie(0,2,2)
(1.4609375, 1.46875)
```

EXERCICE 2

Soit f une fonction définie par morceaux sur l'intervalle $[-2\,;12]$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 5 & si\ -2 \leq x \leq 2 \\ ax + b & si\ \ 2 < x < 6 \\ -0{,}5x + 1 & si\ \ 6 \leq x \leq 12 \end{cases}$$



1. En utilisant le graphique ci-contre, tracer C_f sur $]2\,;6[$ afin que f soit continue sur $[-2\,;12]$.
2. Déterminer les nombres réels a et b afin que la fonction f soit continue sur $[-2\,;12]$.

CORRECTION 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 5 & si \ -2 \leq x \leq 2 \\ ax + b & si \ 2 < x < 6 \\ -0{,}5x + 1 & si \ 6 \leq x \leq 12 \end{cases}$$