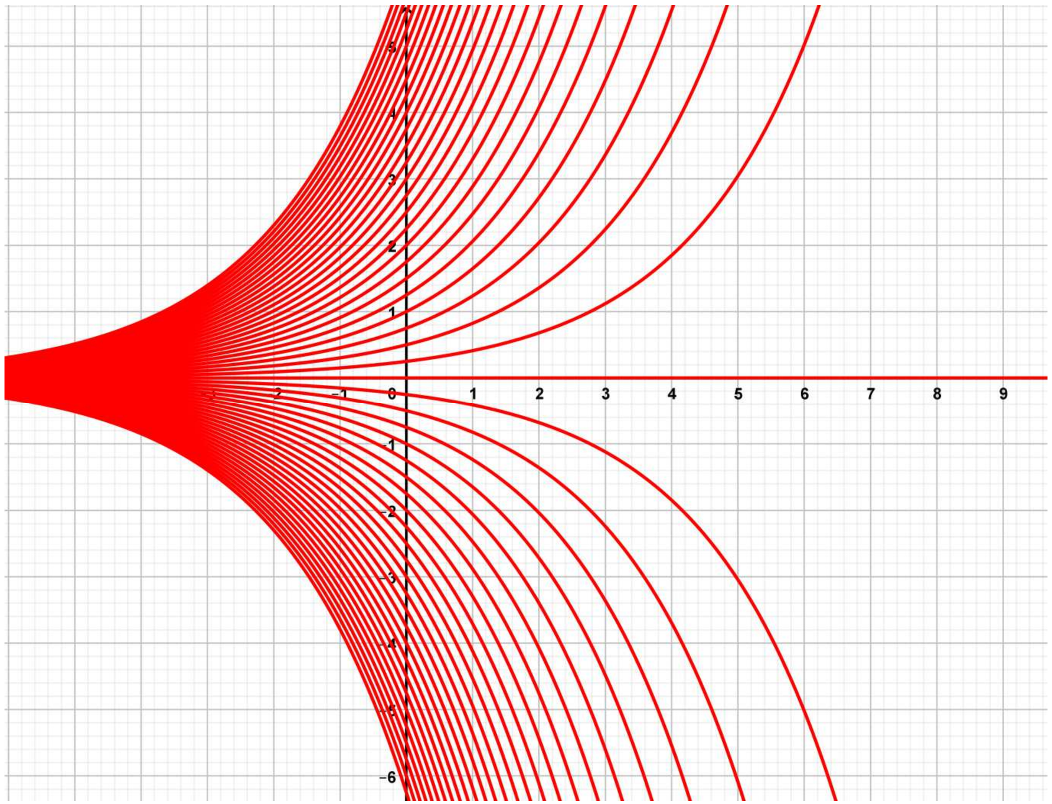
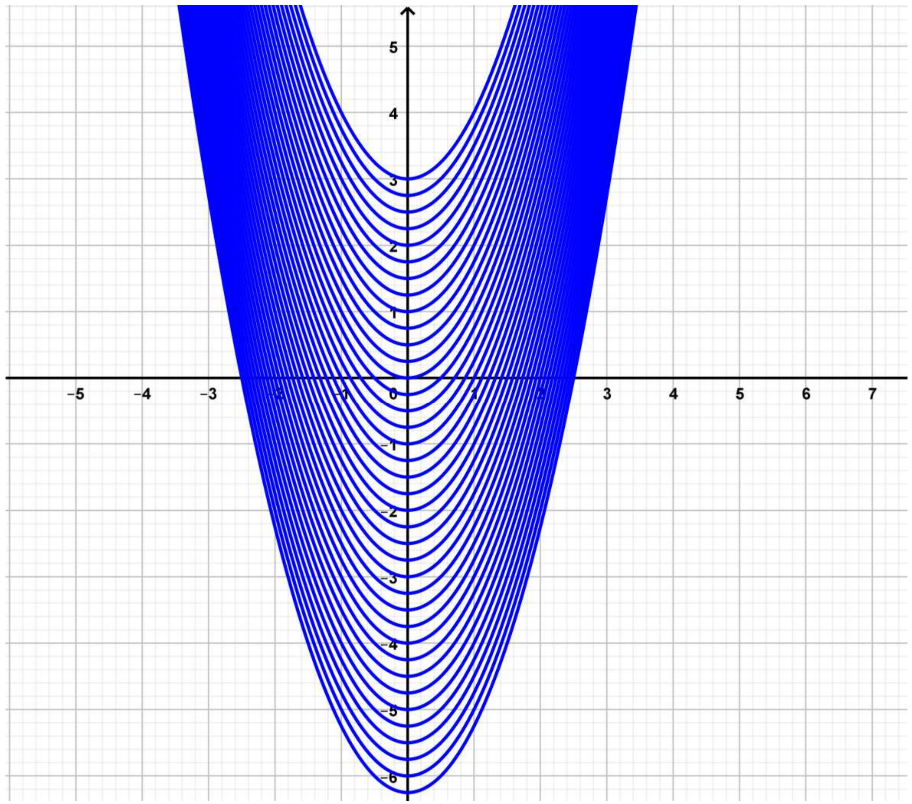
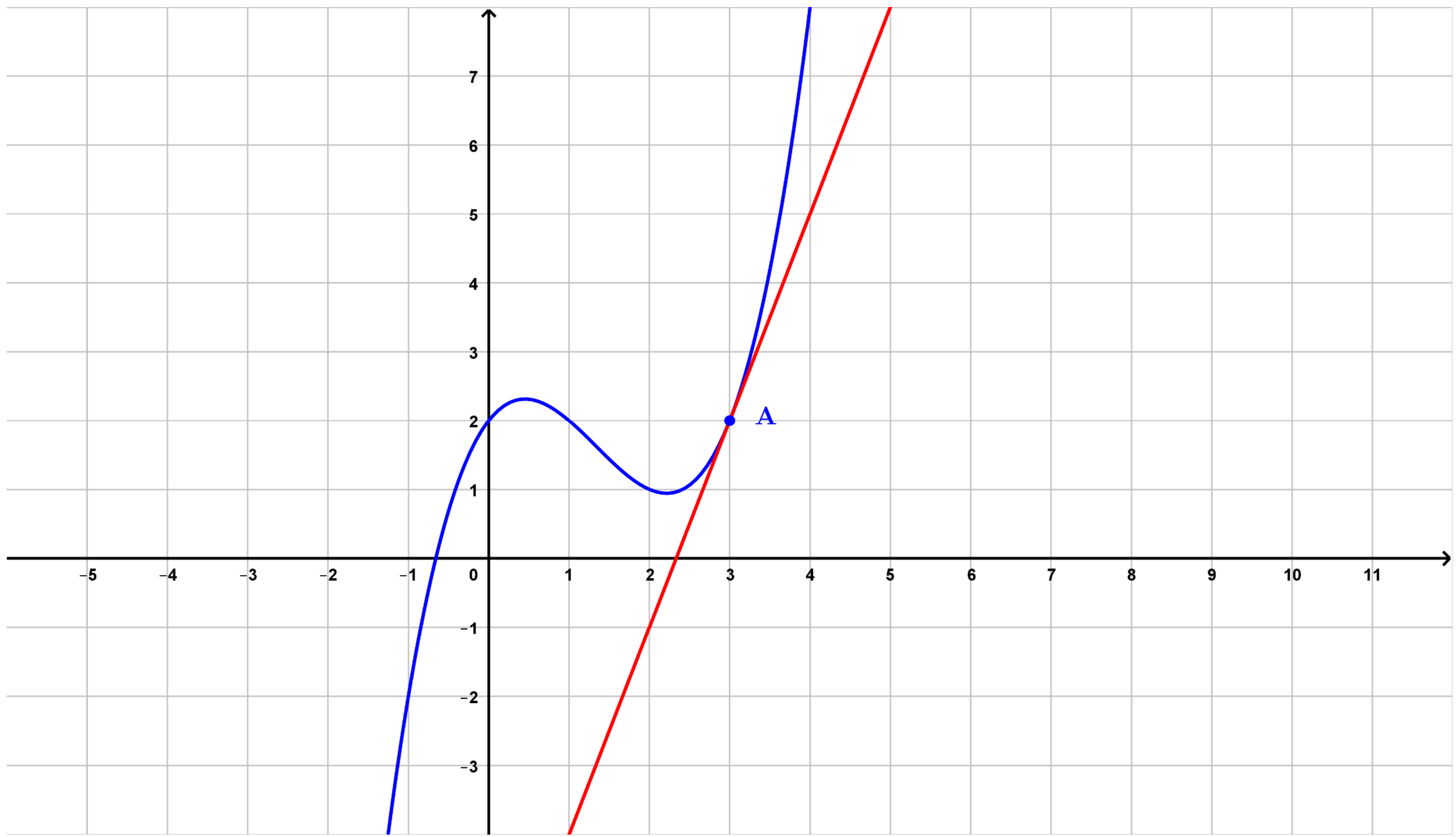
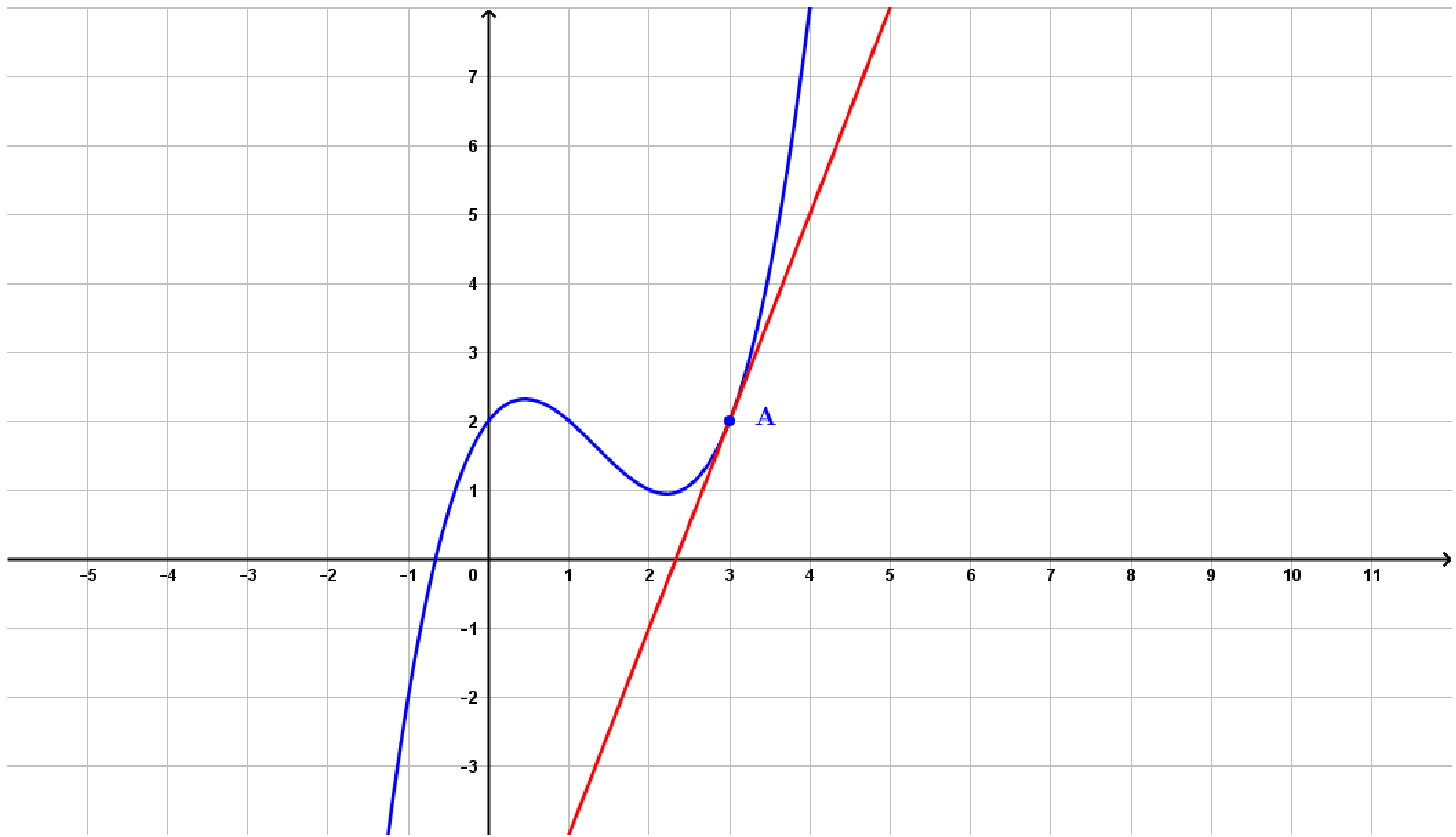
Equations différentielles, première approche: introduction de la fonction exponentielle.

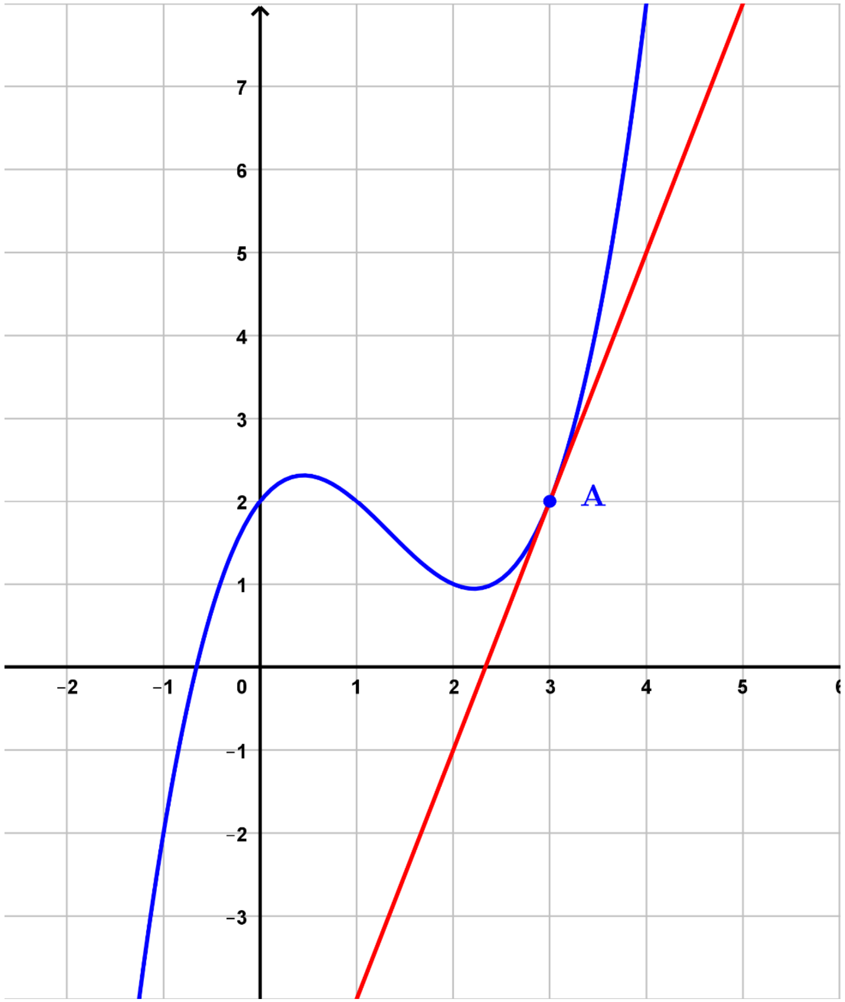






A
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
−1
−2
−3
−4
−5

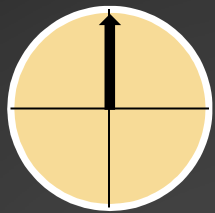

A
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
7 6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3



Coefficient directeur de la tangente en A: $f'(a)$

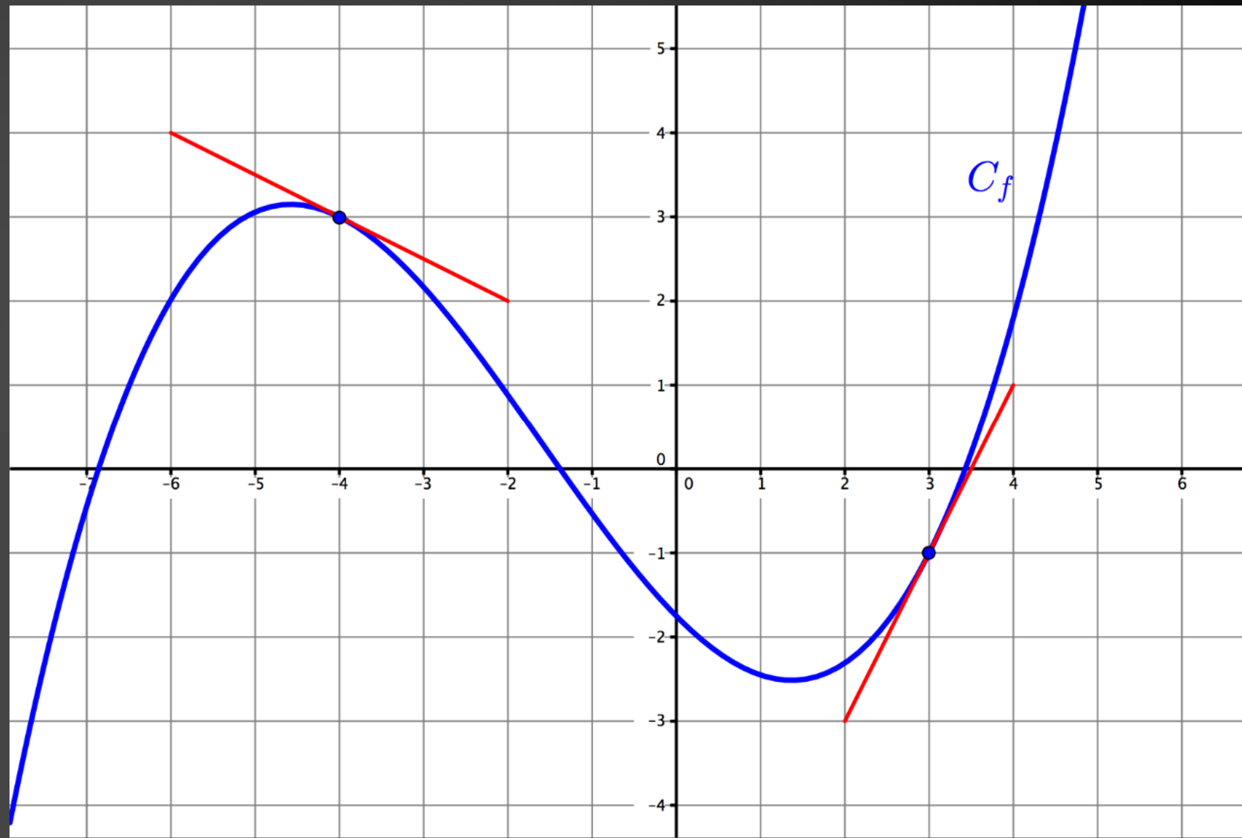
QUESTIONS FLASH

QUESTION 1

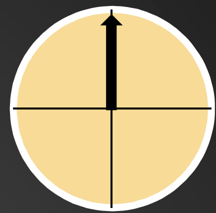


La courbe C_f représente une fonction f.

Donner $f(-4)$ et $f'(-4)$, $f(3)$ et $f'(3)$.



QUESTION 2



Associer à chaque phrase une des égalités proposées

1. La courbe C_f passe par le point $(2; 3)$.
2. Le coefficient directeur de la tangente en 3 est 2.
3. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

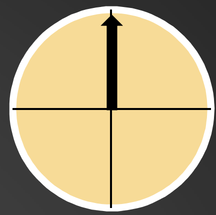
a. $f'(2) = 3$

b. $f'(3) = 2$

c. $f(3)=2$

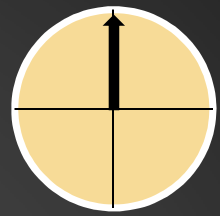
d. $f(2) = 3$

QUESTION 3



Que peut-on dire d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel a, $f(a) = 2$?

QUESTION 4

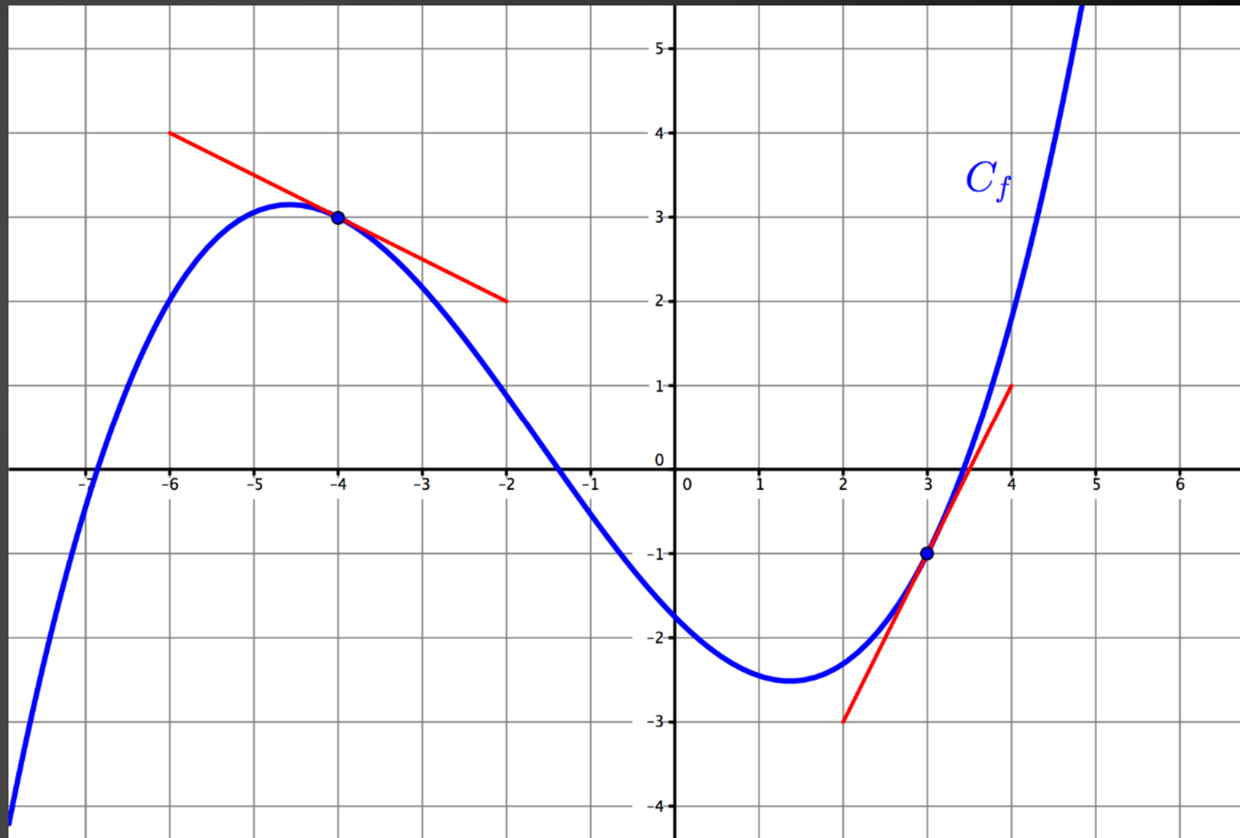


Que peut-on dire d'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel a, $f'(a) = 2$?

CORRECTION

QUESTION 1

Donner $f(-4)$ et $f'(-4)$, $f(3)$ et $f'(3)$.



QUESTION 2

1. La courbe C_f passe par le point $(2;3)$.
2. Le coefficient directeur de la tangente en 3 est 2.
3. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

a. $f'(2) = 3$

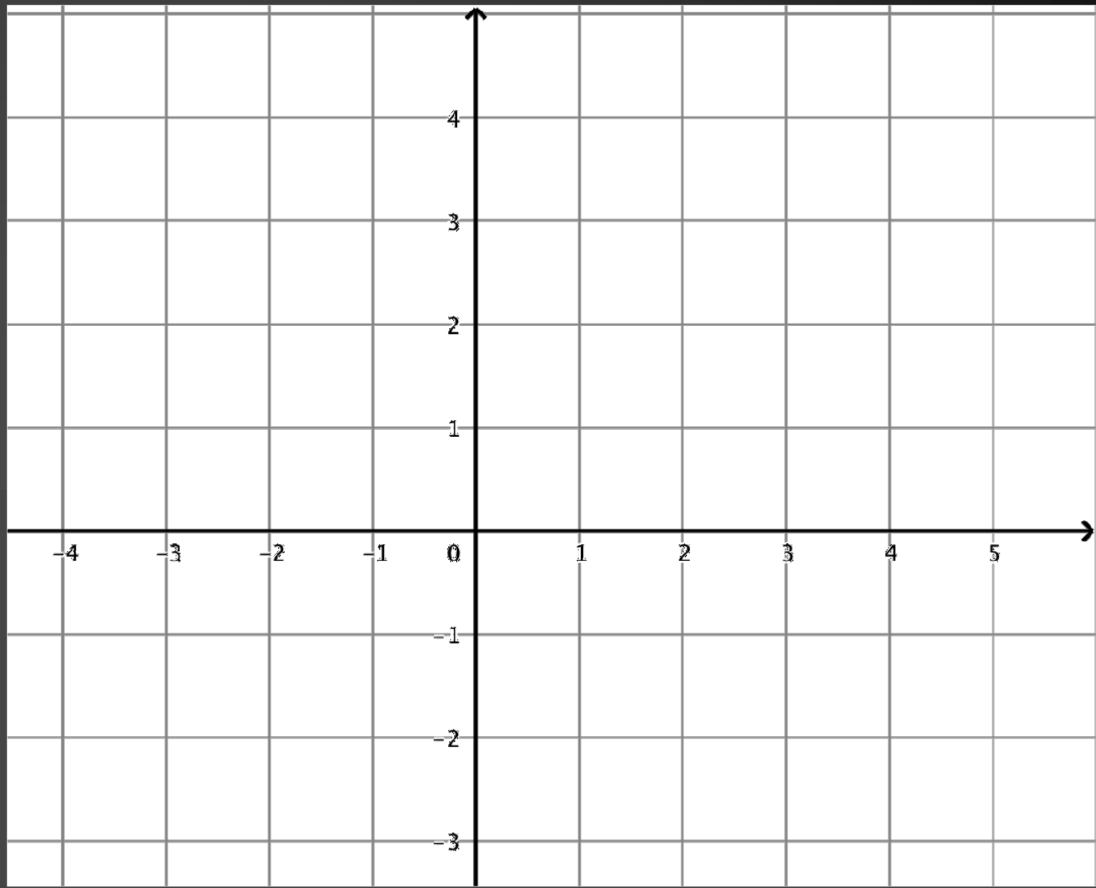
b. $f'(3) = 2$

c. $f(3)=2$

d. $f(2) = 3$

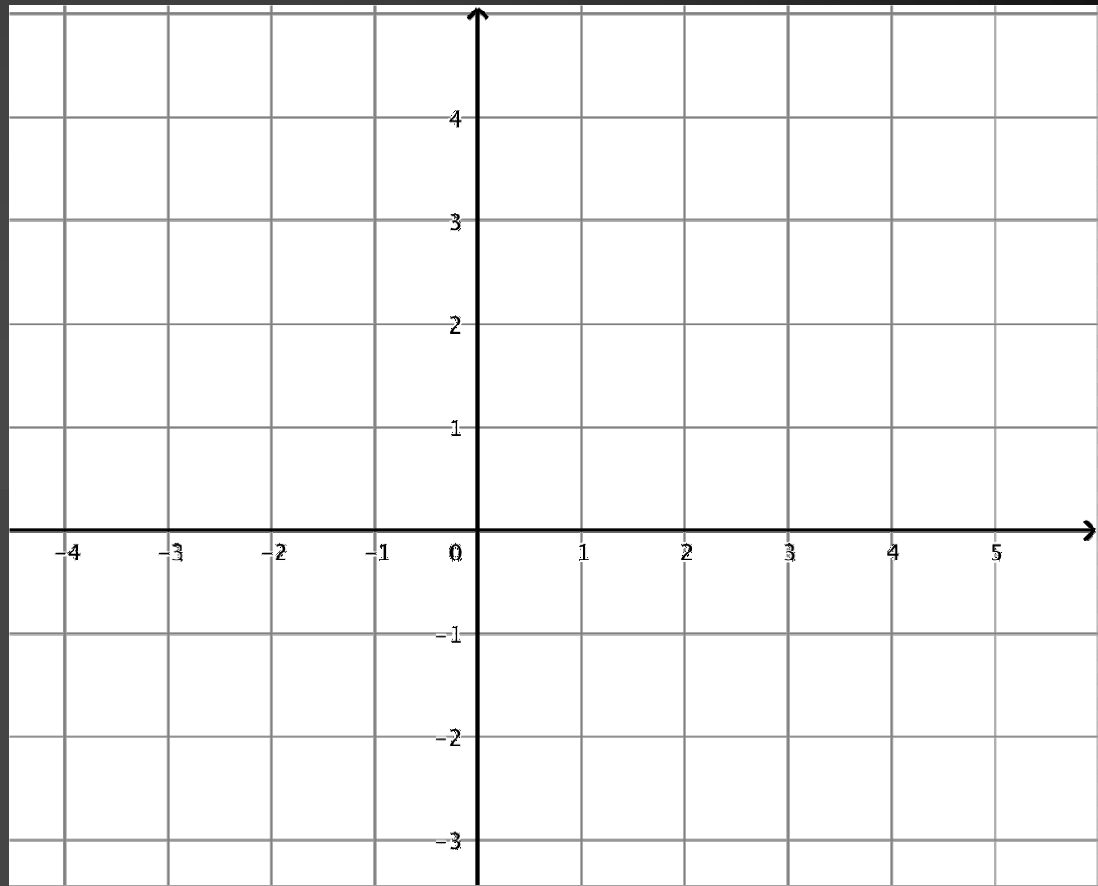
QUESTION 3

Que peut-on dire d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel a, $f(a) = 2$?



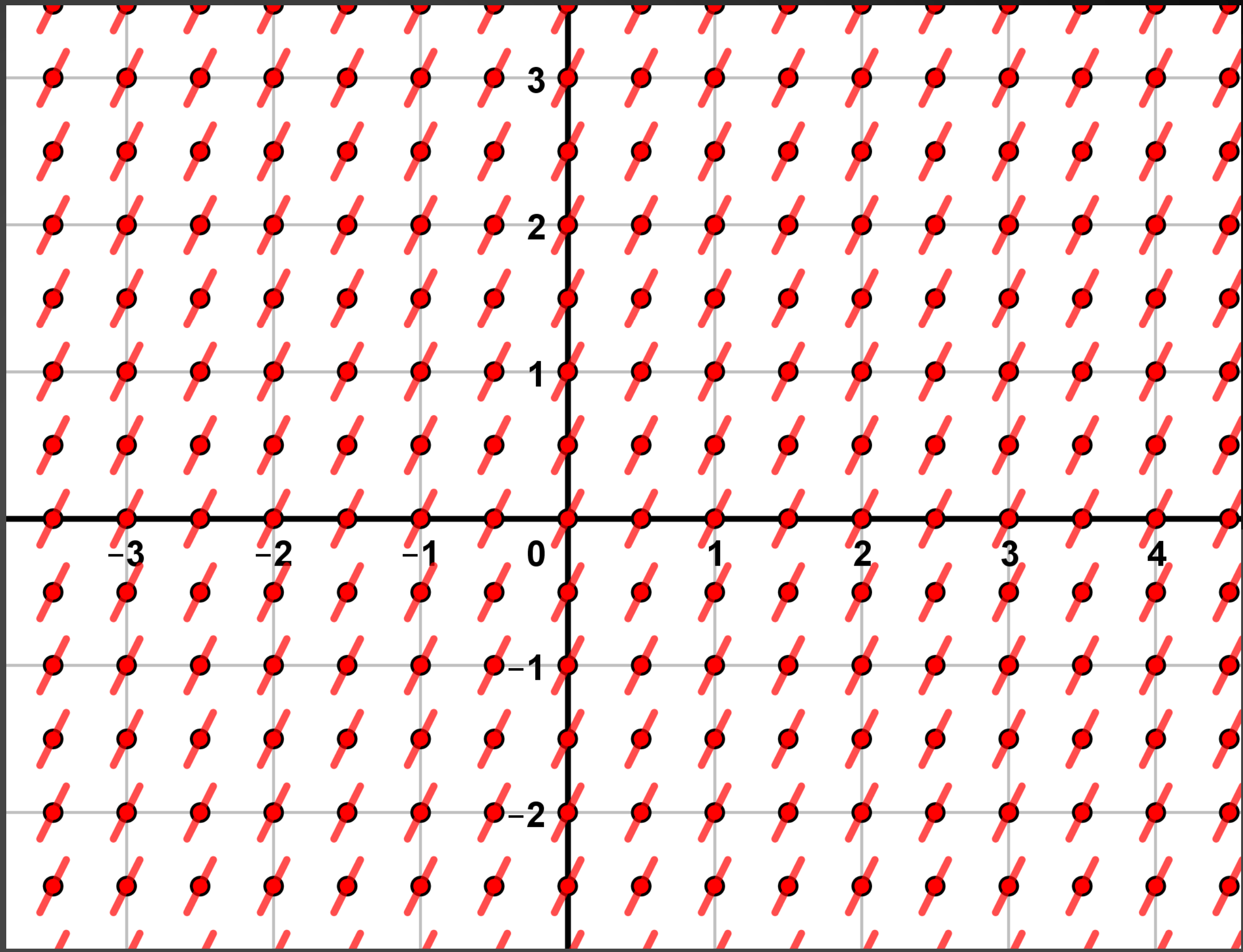
QUESTION 4

Que peut-on dire d'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel a, $f'(a) = 2$?



QUESTION 4

Que peut-on dire d'une fonction telle que, pour tout réel a, $f'(a) = 2$?



Fonctions solutions d'une équation différentielle

Existe-t-il des fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, **pour tout réel** $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{f'(a) = 2}$?

Fonctions solutions d'une équation différentielle

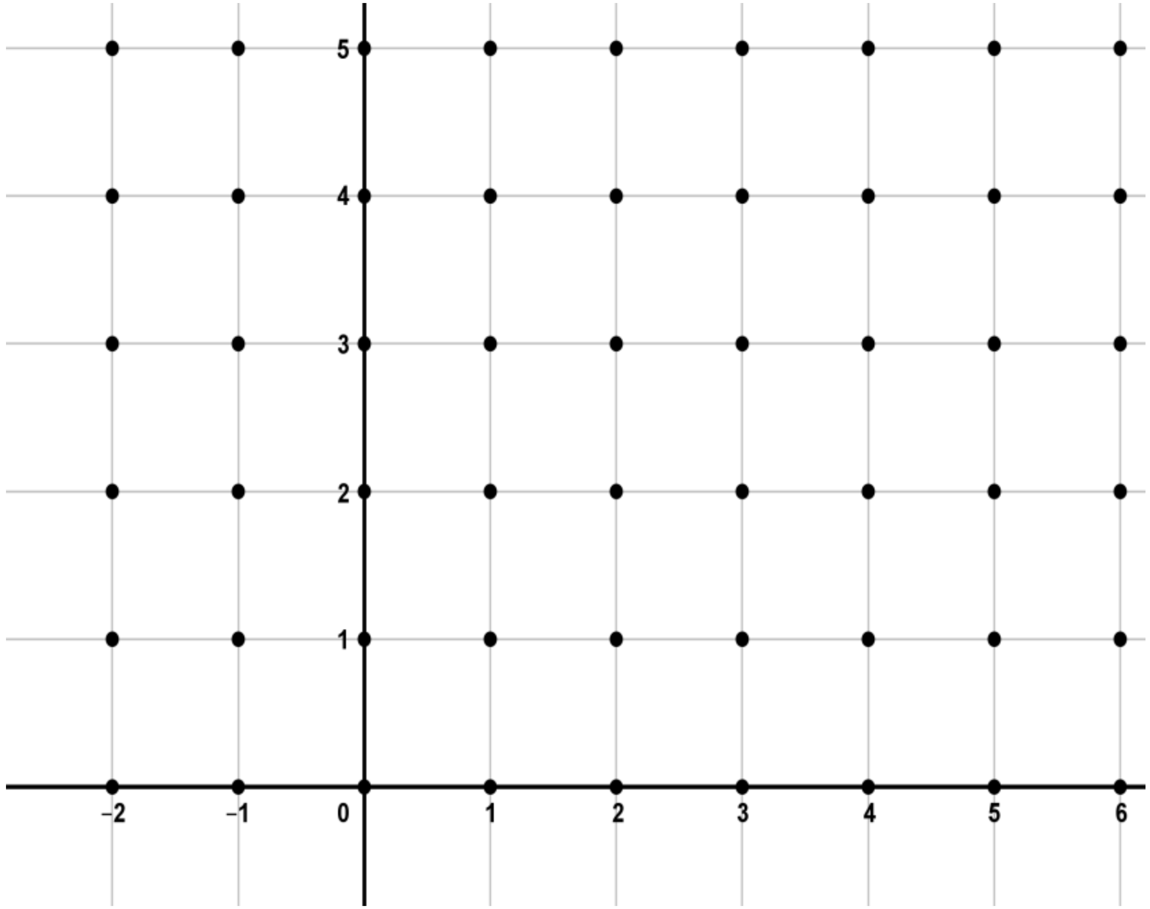
Existe-t-il des fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$

telles que, **pour tout réel** $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{f'(a) = a}$?

Fonctions solutions d'une équation différentielle

pour tout réel a, $f'(a) = a$.

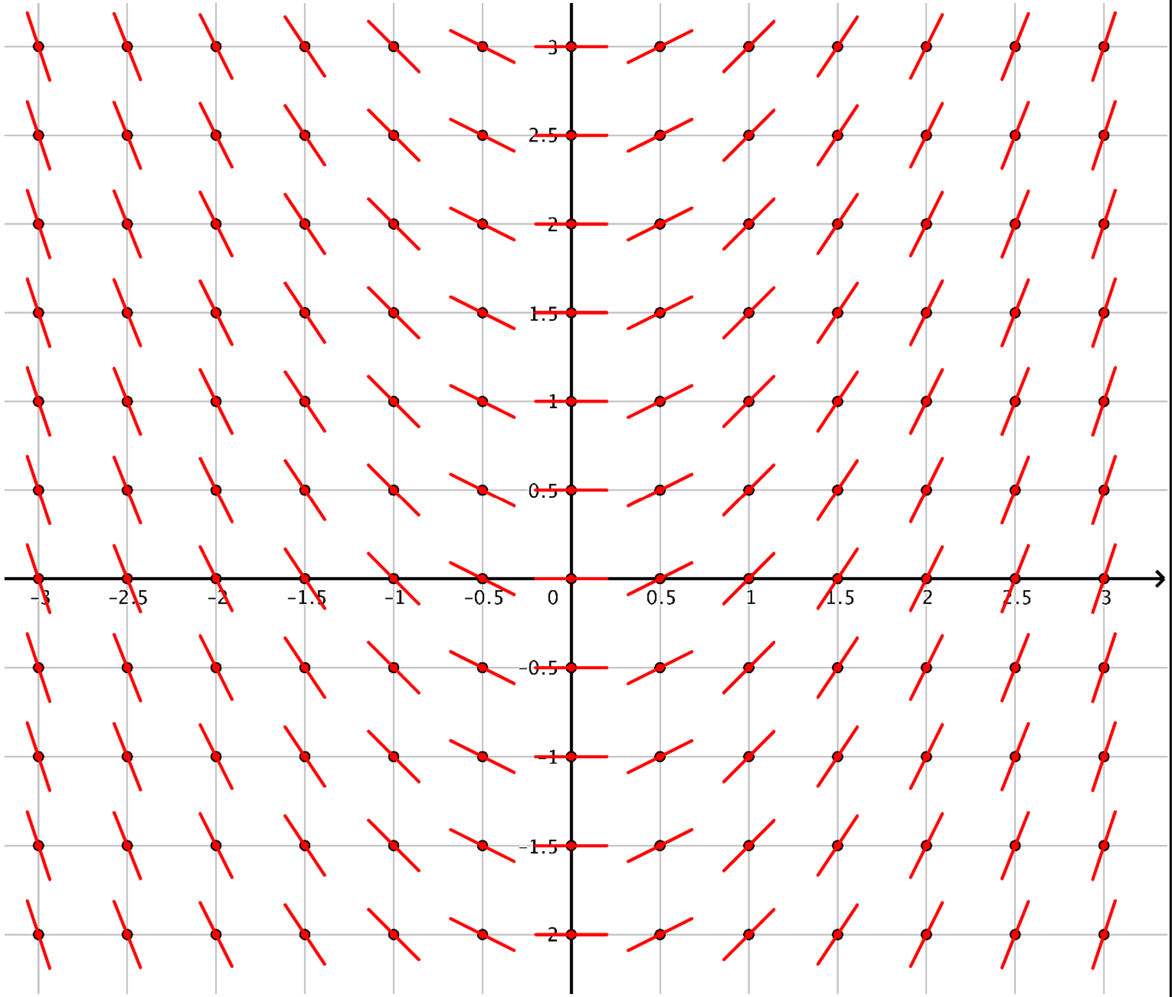
Pour tout réel a le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a est a.



Fonctions solutions d'une équation différentielle

pour tout réel $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{f'(a) = a}$

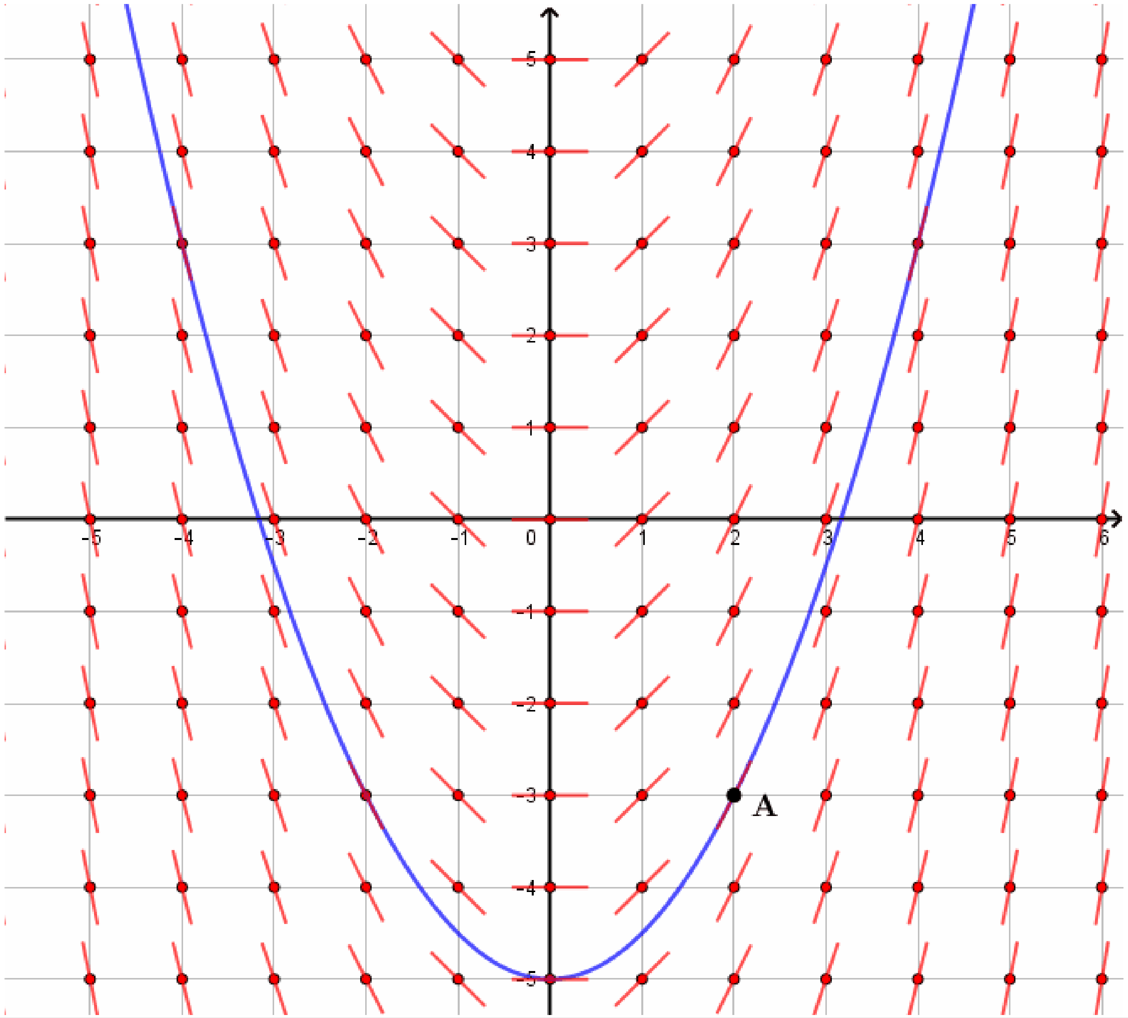
Pour tout réel a le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a est a.



Fonctions solutions d’une équation différentielle

pour tout réel $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{f'(a) = a}$

Pour tout réel a le coefficient directeur de la tangente au point d’abscisse a est a.

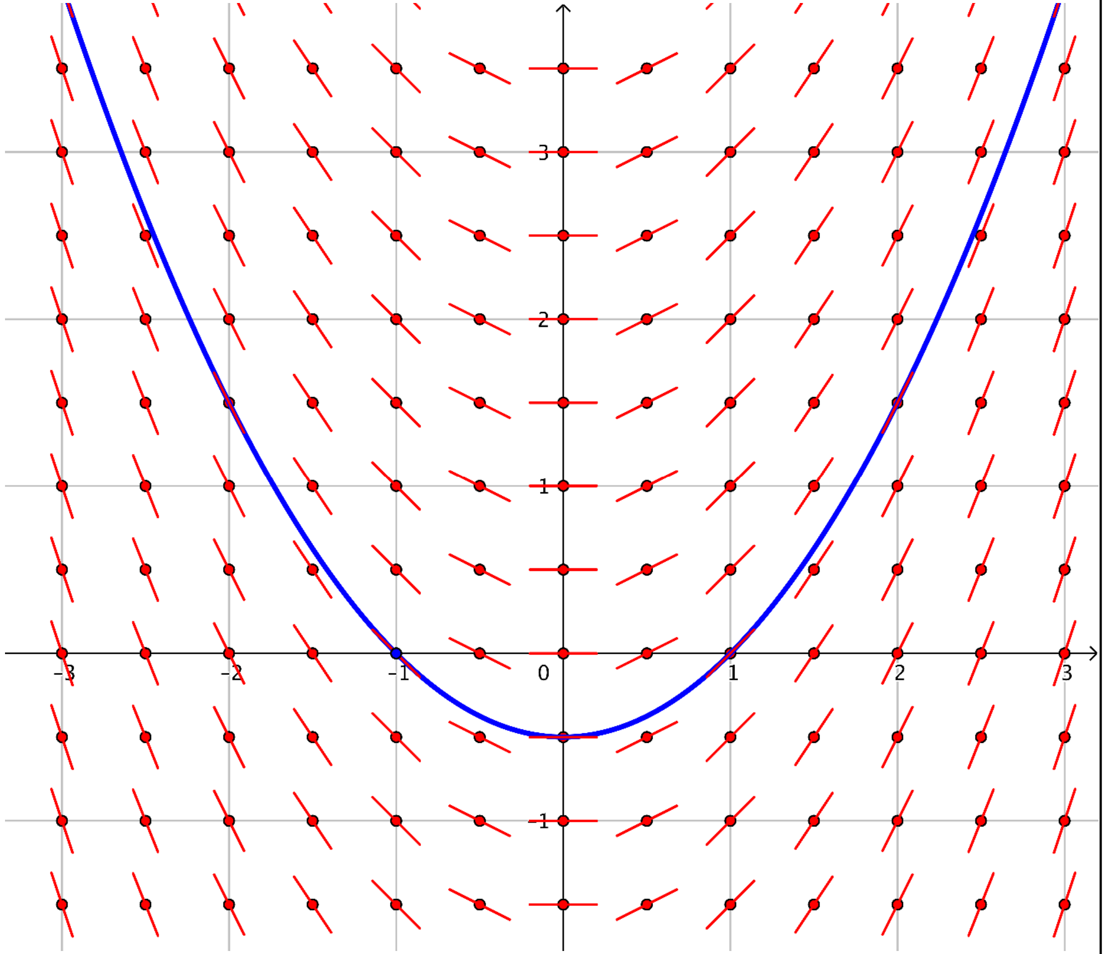


Fonctions solutions d'une équation différentielle

pour tout réel $\boldsymbol{a, f'(a) = a}$

Si on ajoute la condition:

Alors il existe une unique solution au problème (admis).



Fonctions solutions d’une équation différentielle

Fonctions solutions d'une équation différentielle

Existe-t-il des fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$

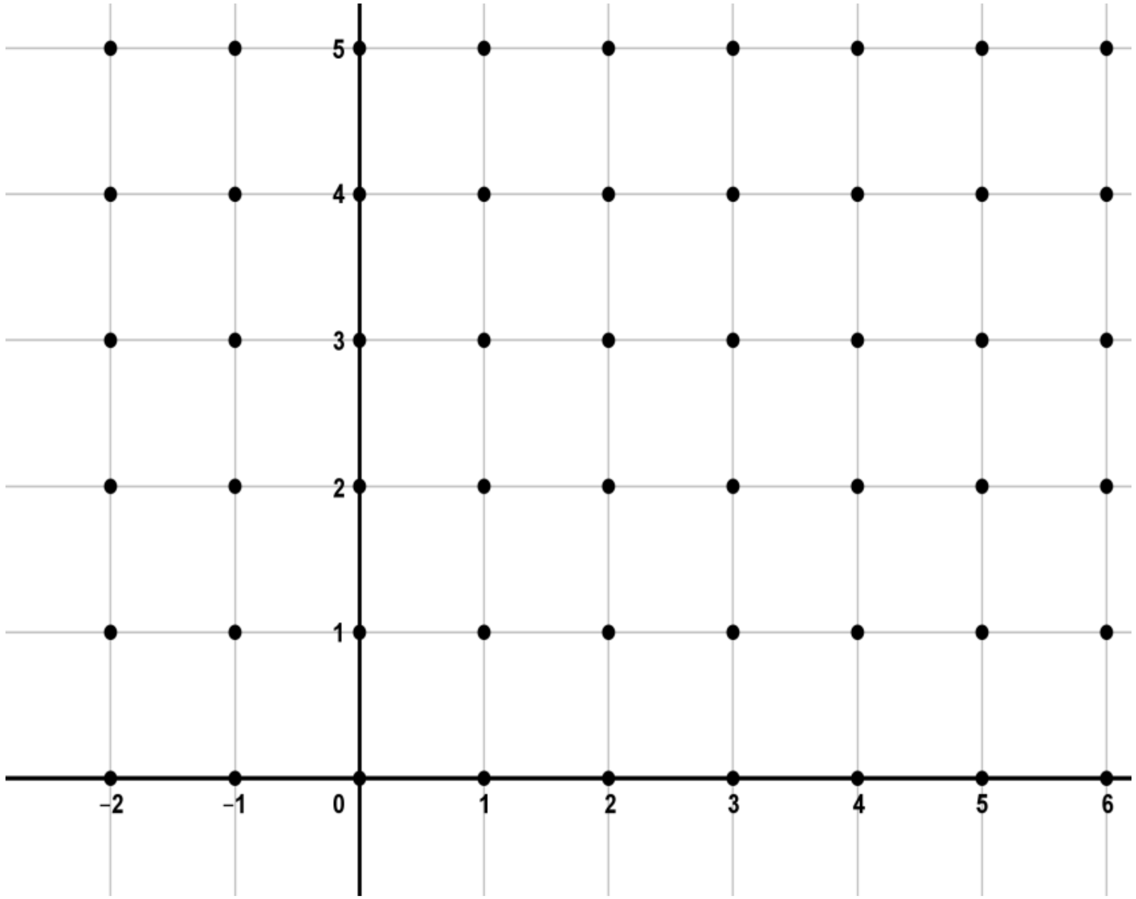
telles que, **pour tout réel $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{f'(a) = f(a)}$** ?

$$f(x) = 0$$

Fonctions solutions d'une équation différentielle

pour tout réel $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{f'(a) = f(a)}$.

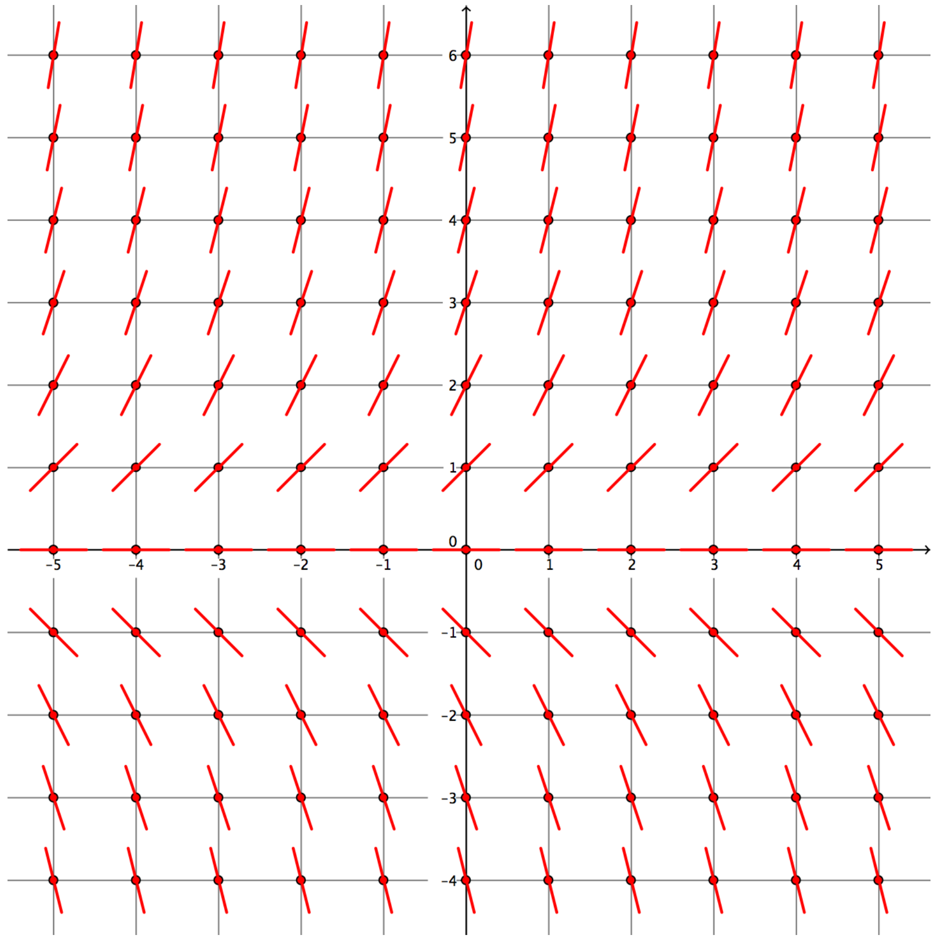
Pour tout réel a le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a est $f(a)$.



Fonctions solutions d’une équation différentielle

pour tout réel $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{f'(a) = f(a)}$.

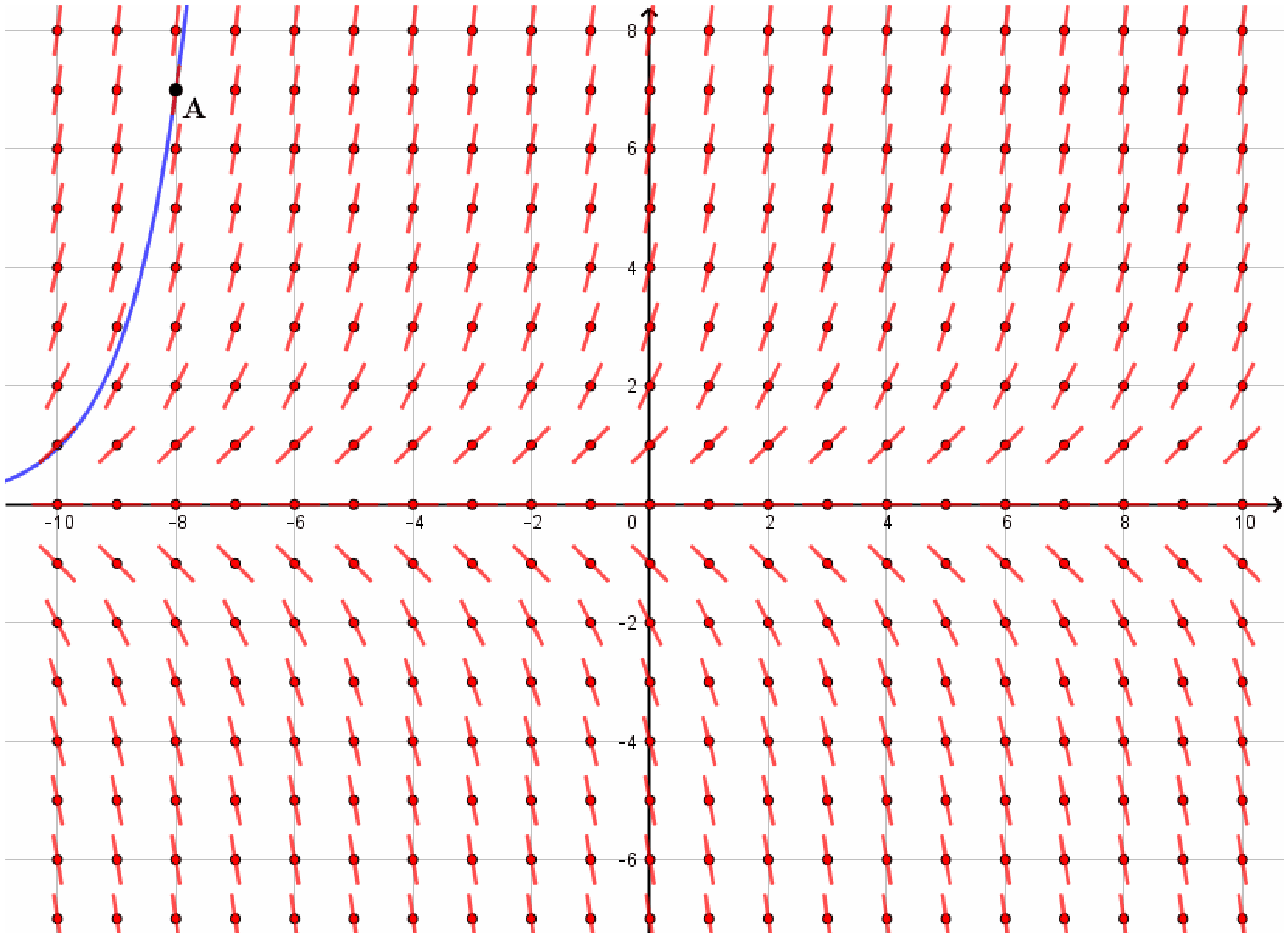
Pour tout réel a le coefficient directeur de la tangente au point d’abscisse a est $f(a)$.



Fonctions solutions d’une équation différentielle

pour tout réel a,

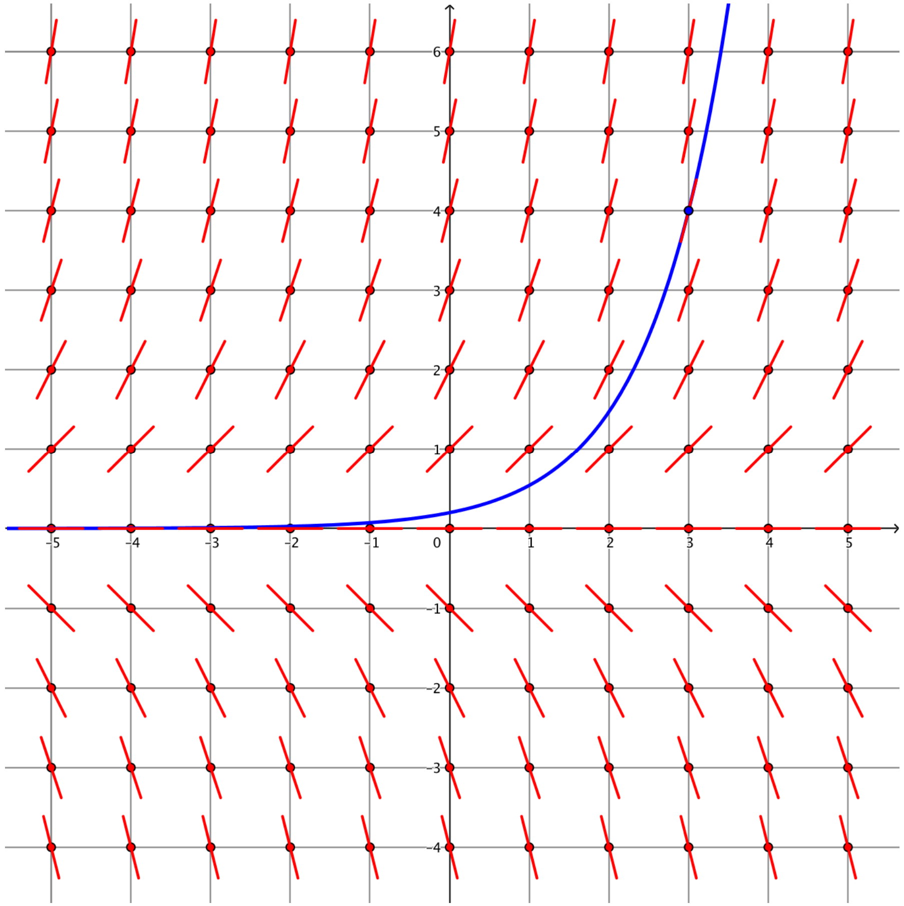
$f'(a) = f(a)$.



Fonctions solutions d'une équation différentielle

pour tout réel a , $f'(a) = f(a)$

Si on ajoute une condition:



Alors, il existe une unique

solution au problème (admis).

La fonction exponentielle

La fonction exponentielle

Théorème et définition:(admis)

Il **existe** une **unique** fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\boldsymbol{f'(a) = f(a)}$ pour tout réel a et $\boldsymbol{f(0) = 1}$.

Cette fonction est nommée fonction exponentielle.

On la note exp.

$\mathbf{exp}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ et $\mathbf{exp}'(\boldsymbol{a}) = \mathbf{exp}(\boldsymbol{a})$ pour tout réel a.

La fonction exponentielle

pour tout réel a

$$\boldsymbol{f'(a) = f(a)}$$

et

$$\boldsymbol{f(0) = 1}$$

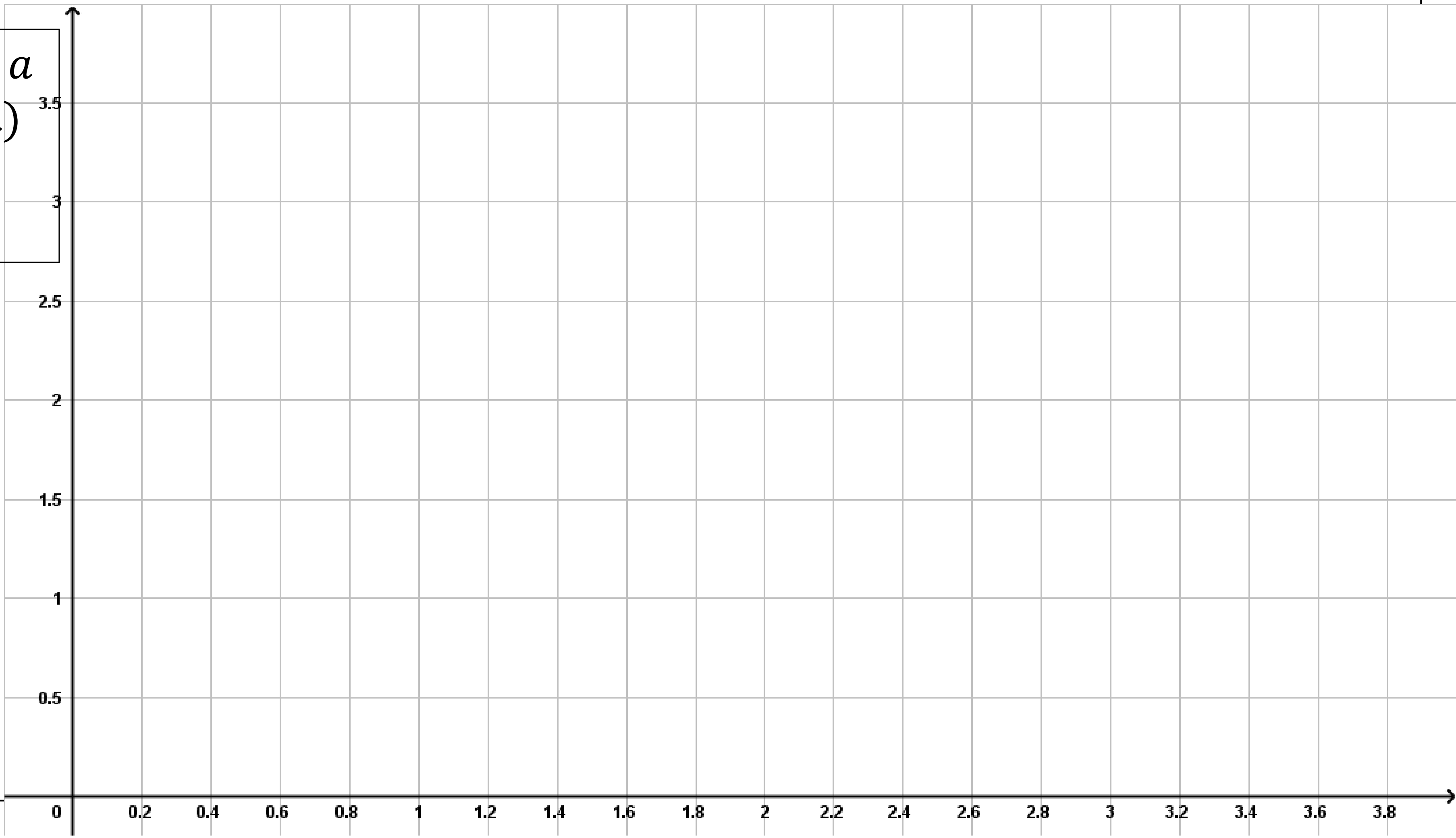
La fonction exponentielle

pour tout réel a

$$f'(a) = f(a)$$

et

$$f(0) = 1$$



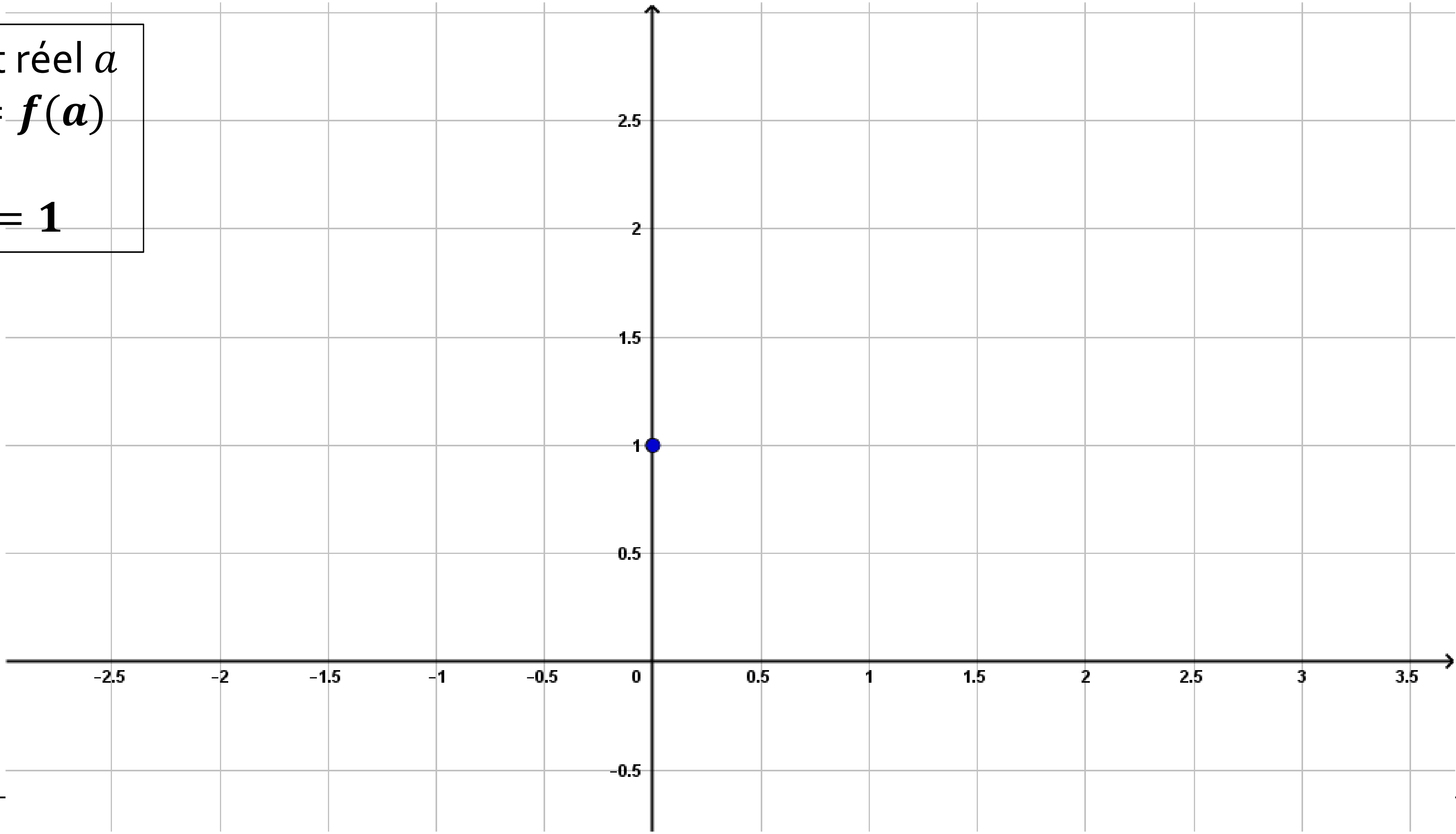
La fonction exponentielle

pour tout réel a

$$f'(a) = f(a)$$

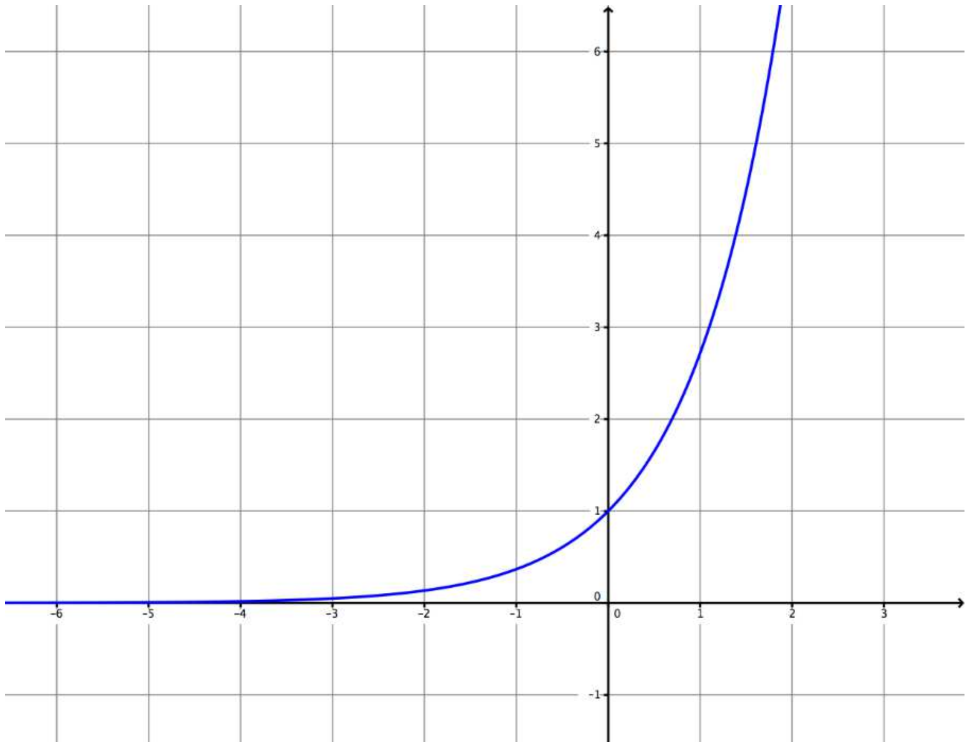
et

$$f(0) = 1$$



La fonction exponentielle

Propriété 1:



La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle

Propriété 2

Pour tous réels x et y, pour tout entier relatif n, on a:

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

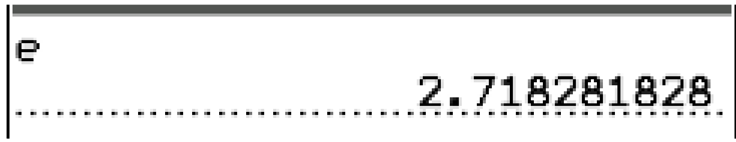
$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$\exp(nx) = (\exp(x))^n$$

La fonction exponentielle: notation

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.



$$\boxed{\exp(nx) = (\exp(x))^n}$$

La fonction exponentielle

Propriété 2

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$\exp(nx) = (\exp(x))^n$$

LE VRAI-FAUX

Affirmation 1

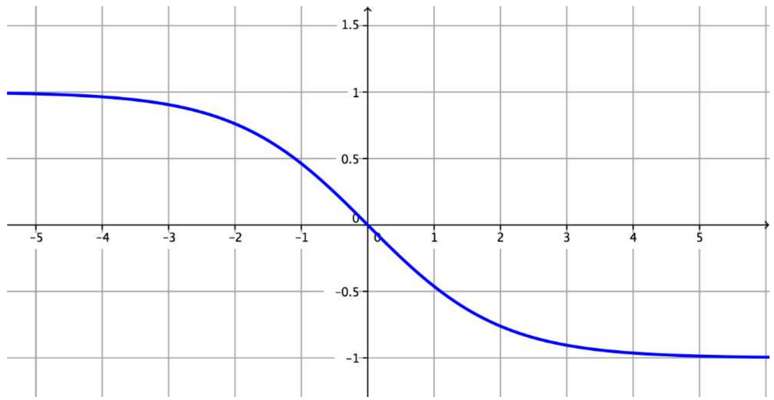
Affirmation 1:

« La suite de terme général $u_n = \mathrm{e}^{1+2n}$ est une suite géométrique »

Affirmation 2

Affirmation 2:

« La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ est une fonction paire.»



Affirmation 3

Affirmation 3:

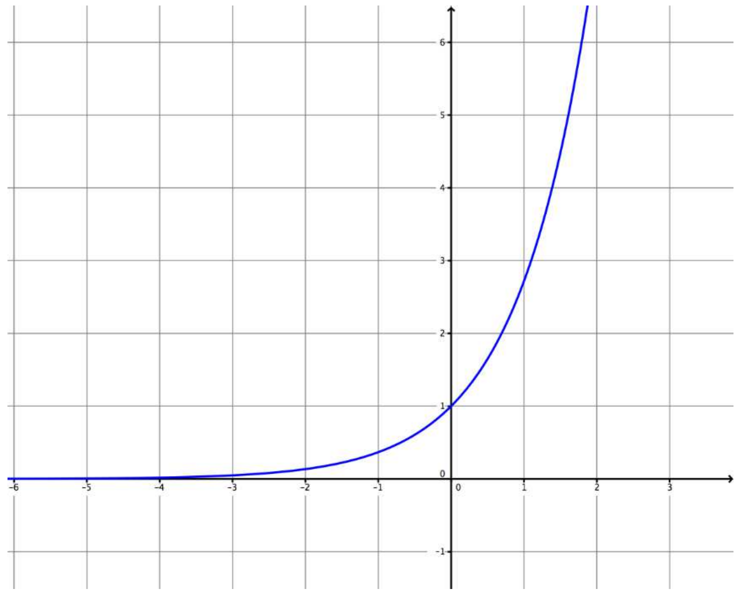
« La droite T d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle »

Affirmation 3

Affirmation 3:

« La droite T d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle »

$$f(x) = e^x$$



Affirmation 3

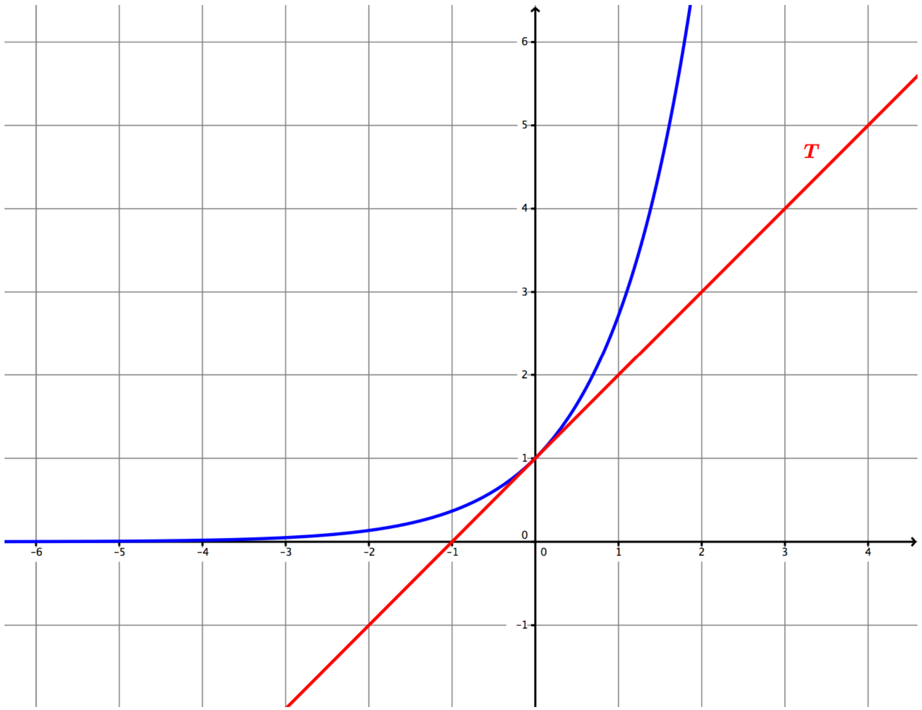
Affirmation 3:

« La droite T d'équation

$y = x + 1$ est tangente

à la courbe représentative

de la fonction exponentielle »



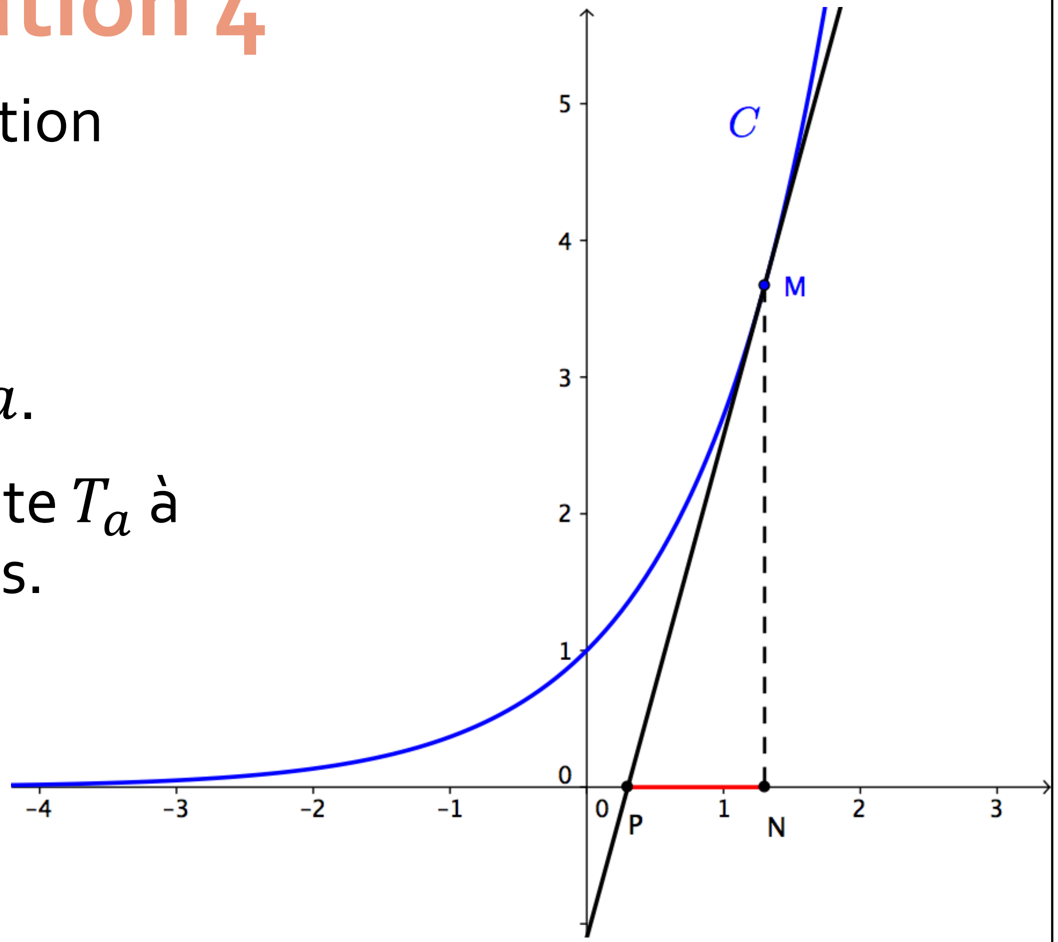
Affirmation 4

C est la courbe représentative de la fonction exponentielle. a est un réel.

N est le point de coordonnées $(a; 0)$.

M est le point de la courbe C d'abscisse a.

P est le point d'intersection de la tangente T_a à la courbe C en M et de l'axe des abscisses.



Affirmation 4:

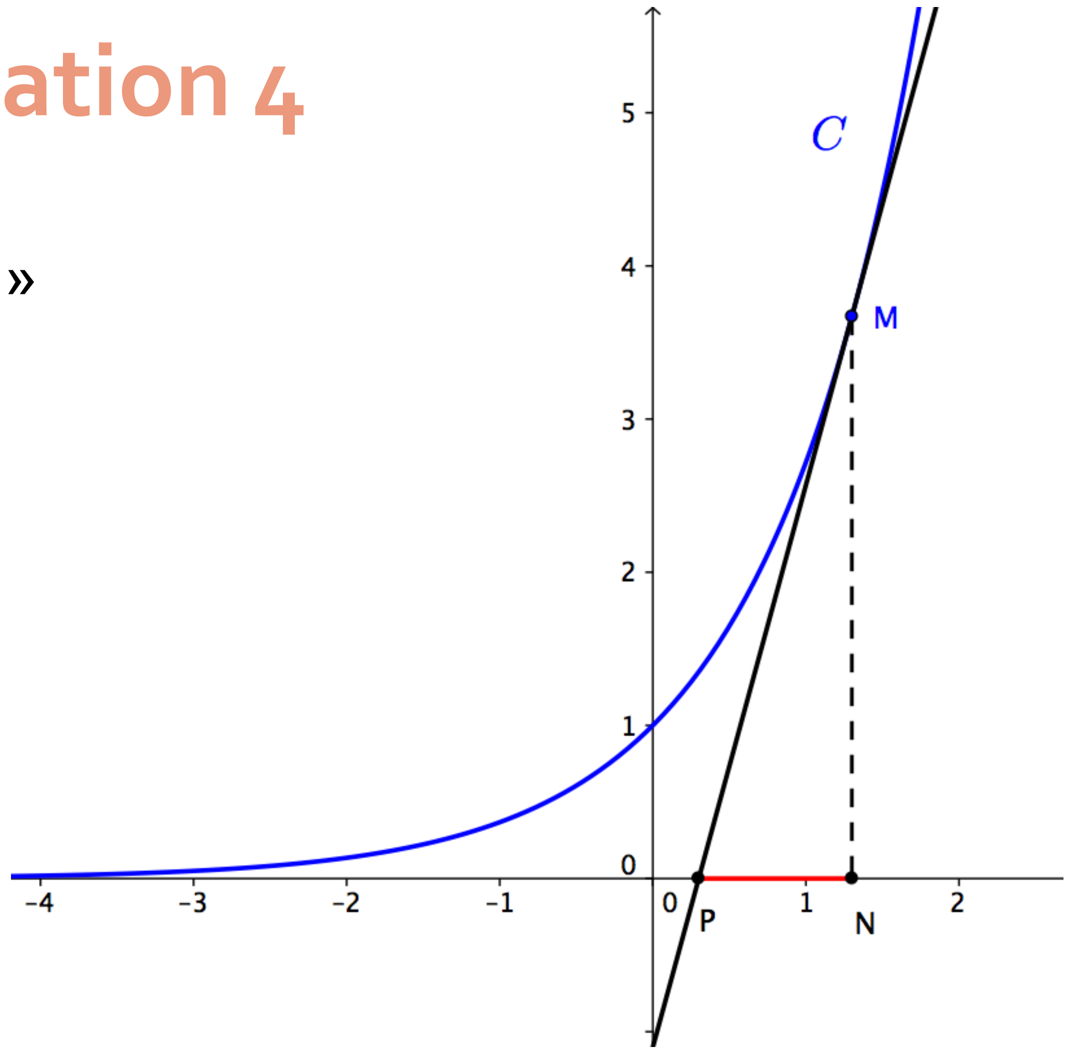
« La distance PN ne dépend pas de a. »

Affirmation 4

Affirmation 4:

« La distance PN ne dépend pas de a. »

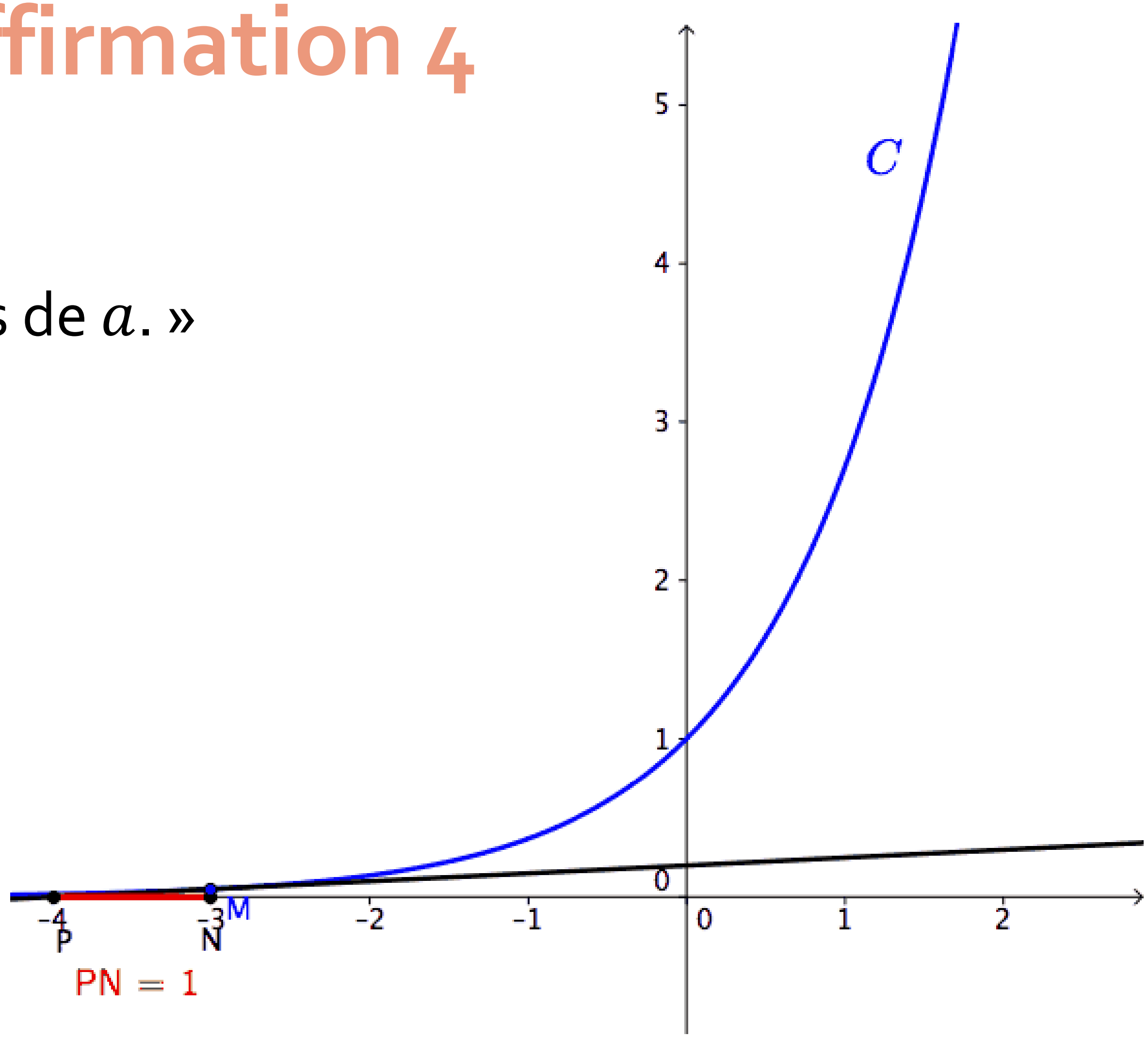
$$f(x) = e^x$$



Affirmation 4

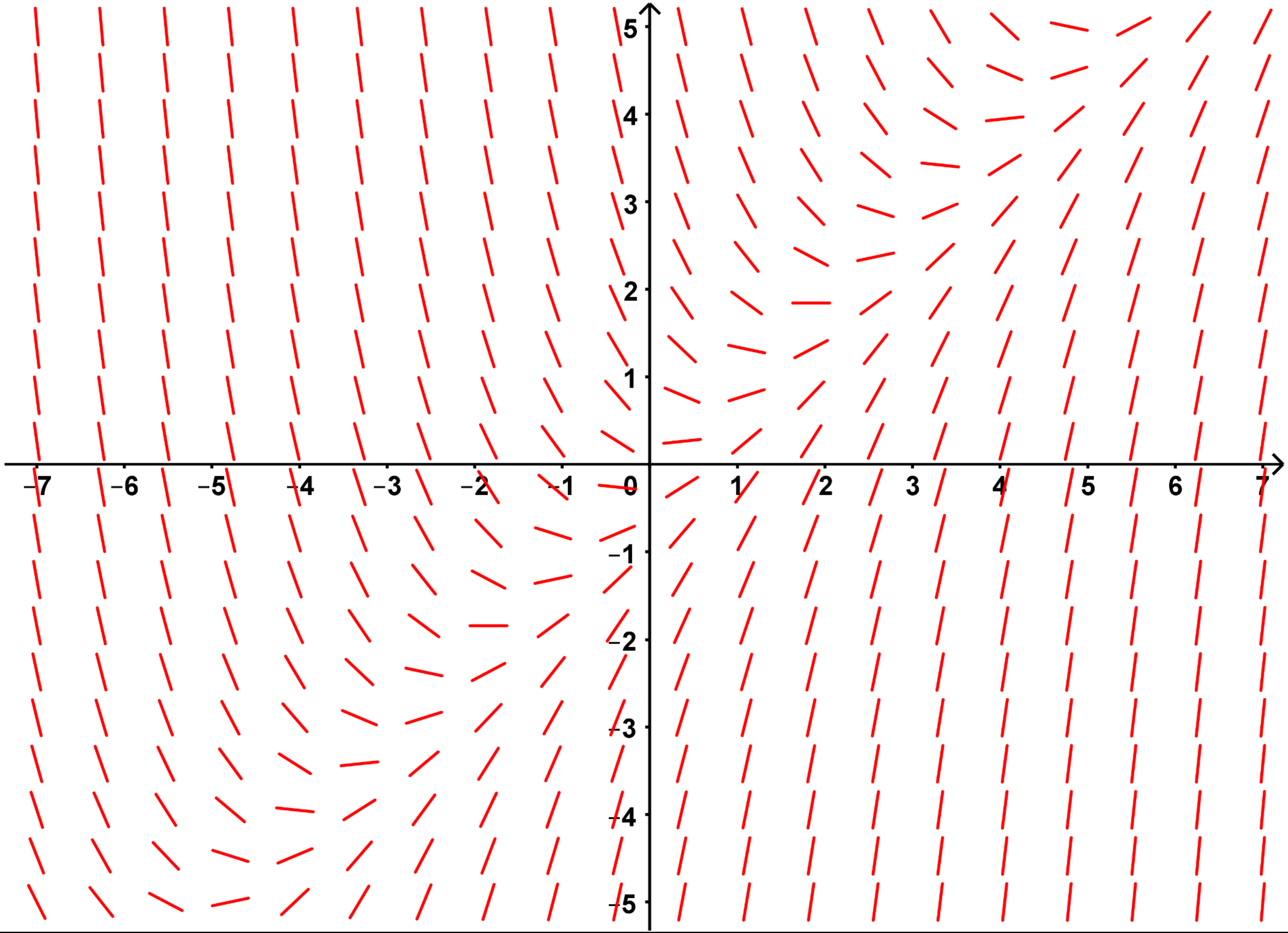
Affirmation 4:

« La distance PN ne dépend pas de a. »



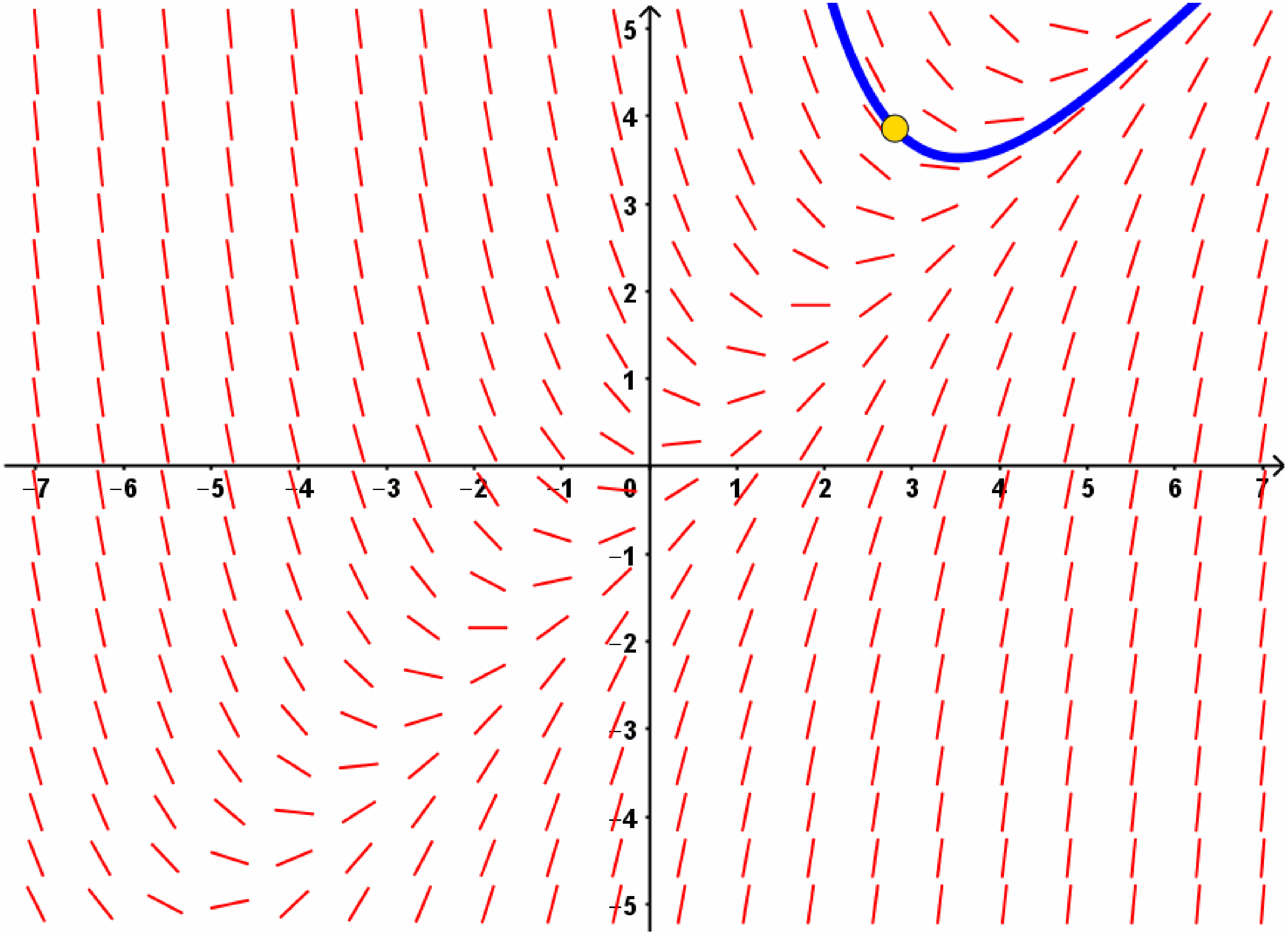
pour tout réel a

$$f'(a) = a - f(a)$$



pour tout réel a

$$f'(a) = a - f(a)$$



pour tout réel a

$$f'(a) = a - f(a)$$