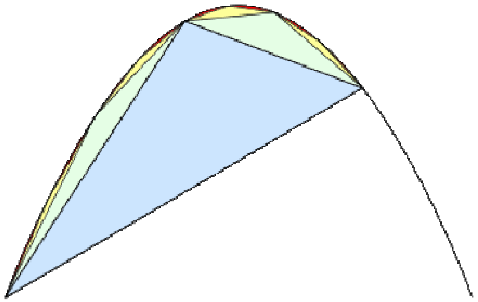
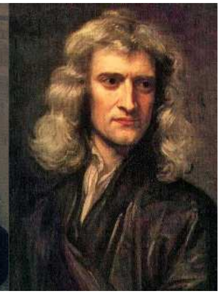
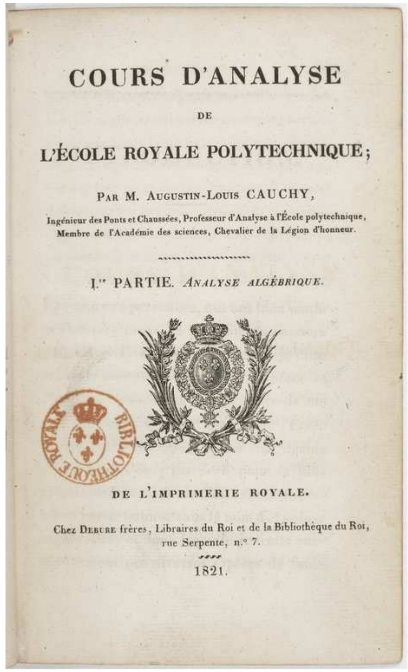
Limites



Archimède, Liu-Hui, Ibn al-Haytham



Leibniz / Newton



COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

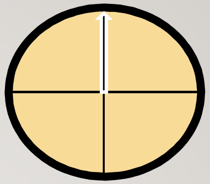
Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

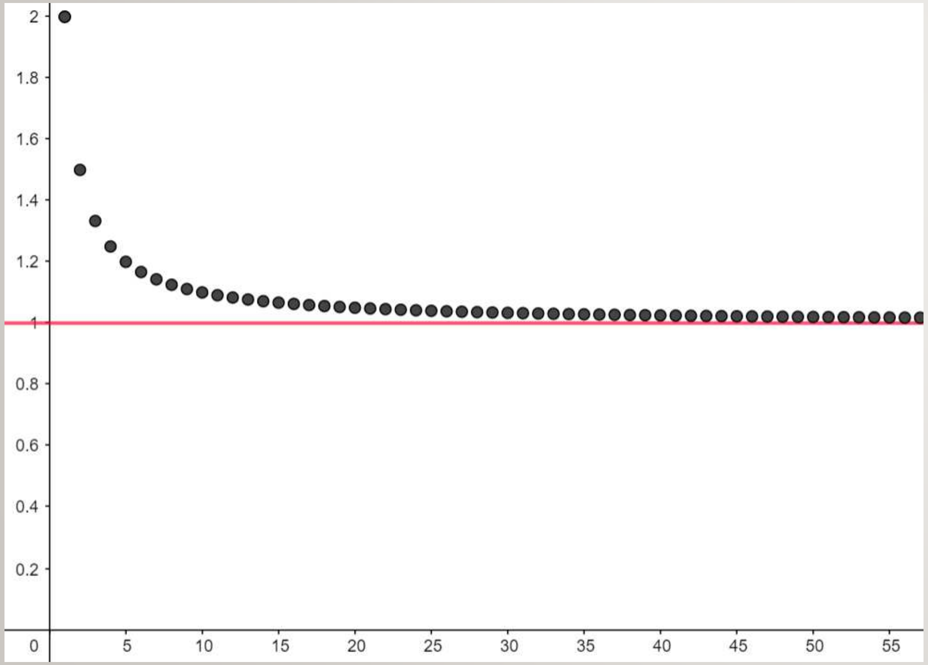
Cauchy

QUESTIONS FLASH

QUESTION 1



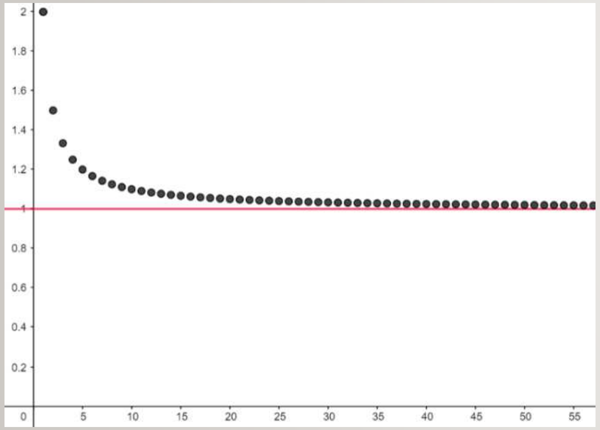
Soit la suite u_n définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$



Que dire des valeurs prises par u_n quand n devient très grand ?

QUESTION 2

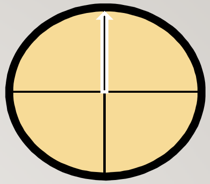
Soit la suite u_n définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$



Peut-on trouver un rang de la suite à partir duquel :

- tous les termes sont compris entre 1 et $1{,}001$?
- tous les termes sont entre 1 et $1{,}00000001$?

QUESTION 3

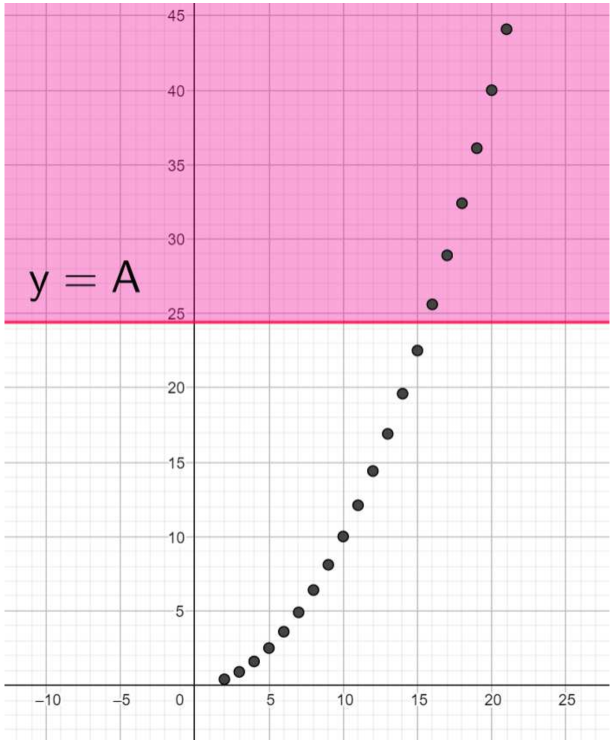


La fonction racine carrée est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$

Peut-on trouver un nombre x_0 tel que tous les nombres plus grands que x_0 ont une racine carrée supérieure à 10^{100} ?

Peut-on trouver un nombre x_0 tel que tous les nombres plus grands que x_0 ont une racine carrée supérieure à $10^{1000000}$?

Limite infinie d'une suite

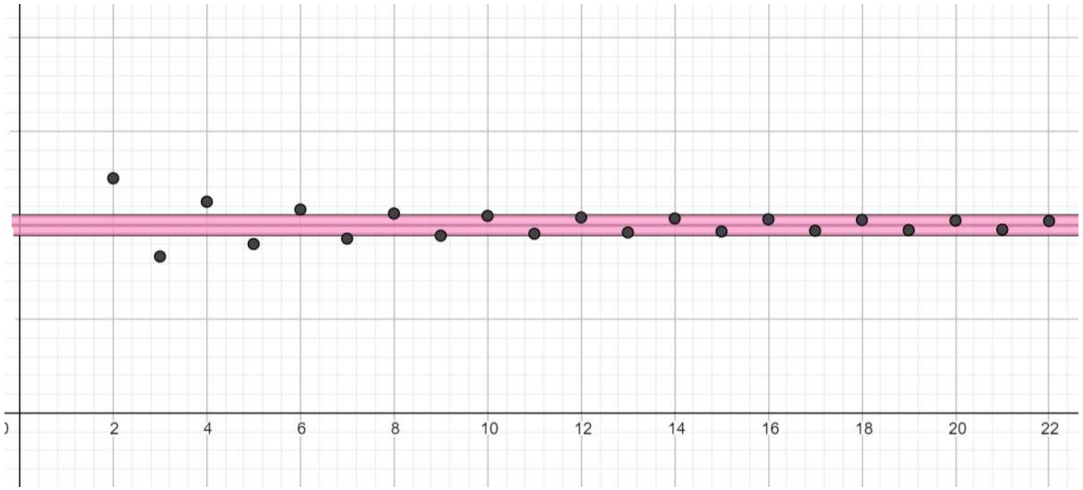


Définition
La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Définition
La suite (u_n) tend vers $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty; A]$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
On dit que (u_n) diverge vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

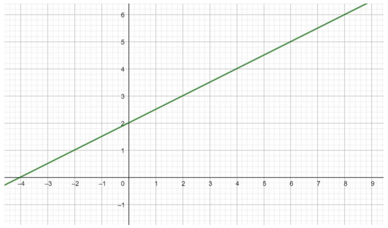
Limite finie d'une suite

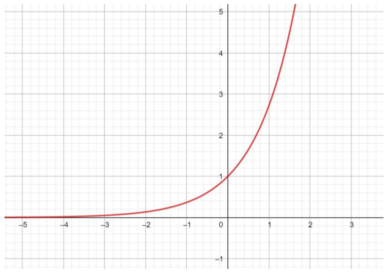
Définition
La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

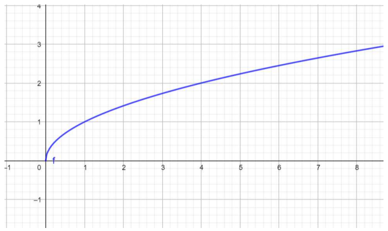


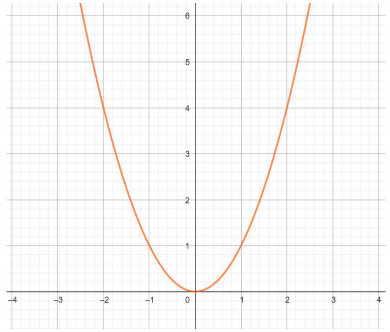
Limite infinie à l'infini des fonctions

Définition
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand



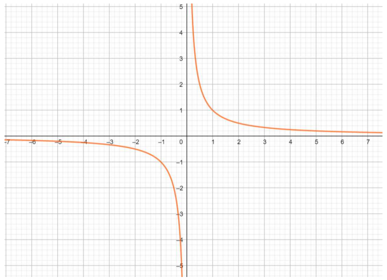


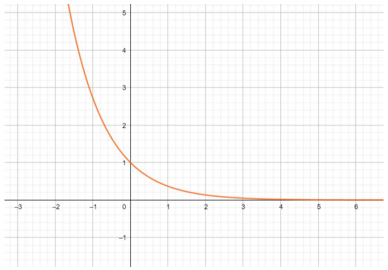


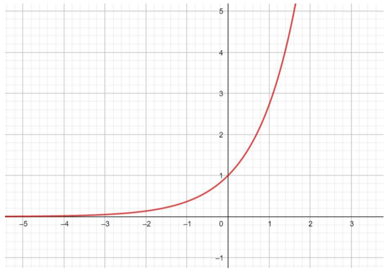


Limite finie à l'infini des fonctions

Définition
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell,$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand

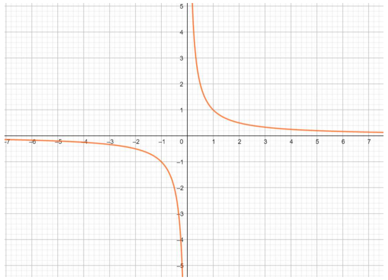


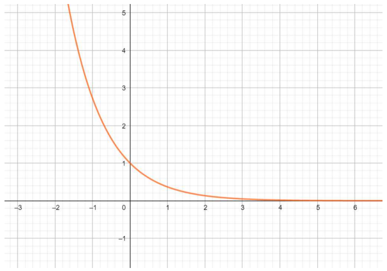


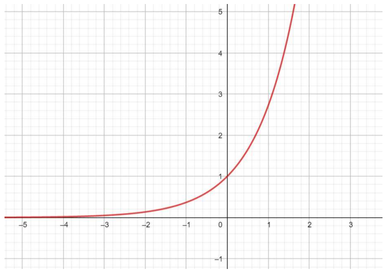


Limite finie à l'infini des fonctions

Définition
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand



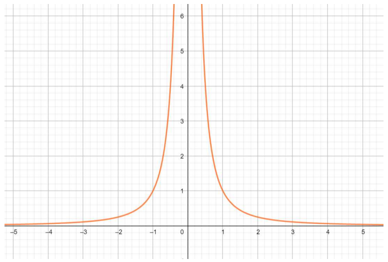


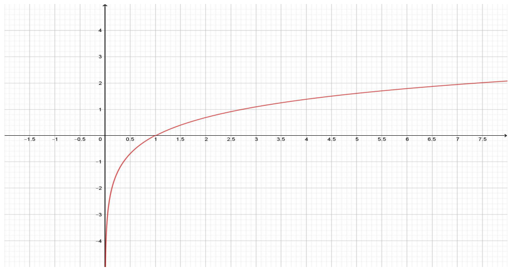


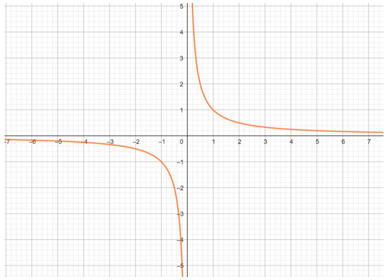
Définition – Asymptotes parallèles à l'axe des abscisses
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, la droite d'équation $y = \ell$ est dite asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f.

Limite infinie en un nombre des fonctions

Définition
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a et on note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a



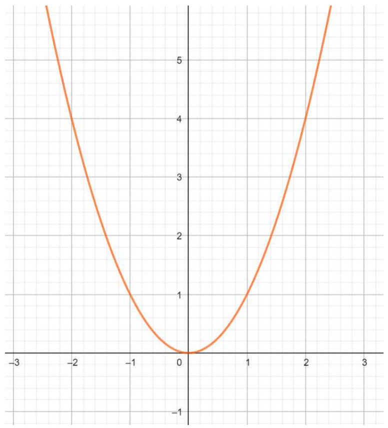


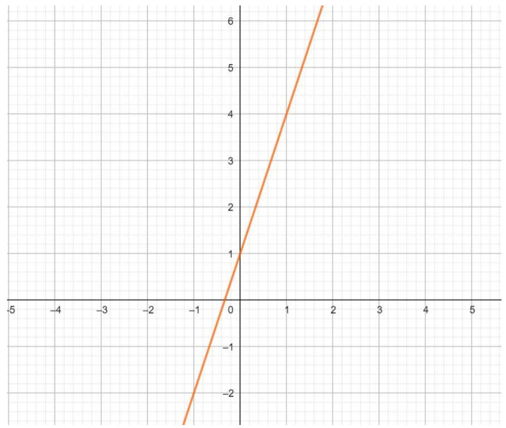


Définition
Lorsque $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a avec $\mathrm{x} < a$ on parle de limite à gauche que l'on note $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$
Lorsque $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a avec $\mathrm{x} > a$ on parle de limite à gauche que l'on note $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

Comment déterminer la limite d'une suite ou d'une fonction dans des cas simples ?

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 + 3x + 1$$





$\lim\limits_{x \to \alpha} \boldsymbol{u}(x)$	$\lim\limits_{x \to \alpha} \boldsymbol{v}(x)$	$\lim\limits_{x \to \alpha} \boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Comment déterminer la limite d'une somme de suites ou de fonctions dans des cas simples ?

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x + e^{-x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 + 3x + 1$$

$\lim\limits_{x \to \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{u}(x)$	$\lim\limits_{x \to \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{v}(x)$	$\lim\limits_{x \to \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
l	l'	$l + l'$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
l	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée

Comment déterminer la limite d'un produit de suites ou de fonctions dans des cas simples ?

$$\lim_{n \to +\infty} (2n+1)\ln(n)$$

$\lim_{x \to \alpha} \boldsymbol{u}(x)$	$\lim_{x \to \alpha} \boldsymbol{v}(x)$	$\lim_{x \to \alpha} \boldsymbol{u}(x) \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$	
ℓ	ℓ'	$\ell \times \ell'$	
$\ell \neq 0$	∞	∞	Règle des signes
∞	∞	∞	
0	∞	indéterminée	

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2+1)\left(\frac{1}{x} - 2\right)$$

Comment déterminer la limite d'un quotient de suites ou de fonctions dans des cas simples ?

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{n^2+2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{3x-1}{2-x}$$

<table>
<tr><th>$\lim\limits_{x\to\alpha} \boldsymbol{u}(x)$</th><th>$\lim\limits_{x\to\alpha} \boldsymbol{v}(x)$</th><th colspan="2">$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})}$</th></tr>
<tr><td>l</td><td>$l' \neq 0$</td><td colspan="2">$\dfrac{l}{l'}$</td></tr>
<tr><td>l</td><td>∞</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>l</td><td>0</td><td rowspan="2">∞</td><td rowspan="2">règle des signes</td></tr>
<tr><td>∞</td><td>$l' \neq 0$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td colspan="2">Indéterminée</td></tr>
<tr><td>∞</td><td>∞</td><td colspan="2">Indéterminée</td></tr>
</table>

Comment déterminer la limite d'une suite ou d'une fonction dans des cas indéterminés

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 + 3x + 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}(2 - x^3)$$

Comment déterminer la limite d'une suite ou d'une fonction dans des cas indéterminés

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 4}$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Comment déterminer la limite d'une suite ou d'une fonction par croissances comparées dans des cas simples ?

Propriétés : Pour tout entier naturel n non nul,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$$

Autres limites associées : Pour tout entier naturel n non nul,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n e^x = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x)}{x^n} = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x =$$

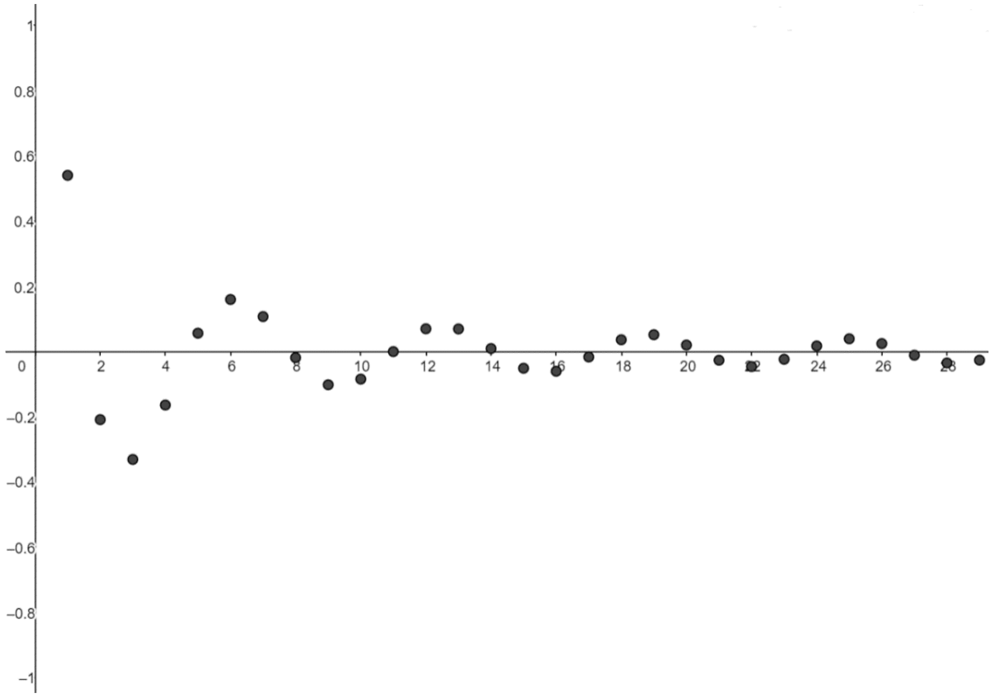
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} =$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (5 - x) \ln(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x - 1) e^{-x}$$

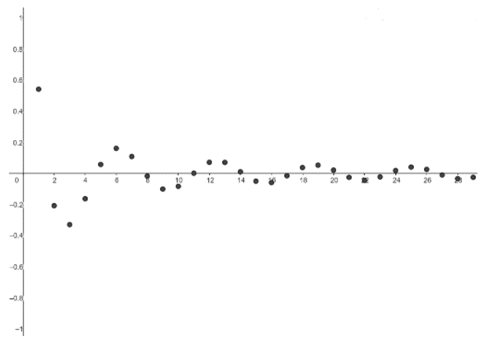
Comment déterminer la limite d'une suite ou d'une fonction dans des cas simples ?

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cos(n)}{n}$$



Comment déterminer la limite d'une suite ou d'une fonction par encadrement dans des cas simples ?

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cos(n)}{n}$$



Théorème

Si pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

Si pour tout réel $x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

EXERCICES

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$

a. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction f
b. Interpréter graphiquement les résultats

CORRECTION 1

EXERCICE 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$

par $u_n = e^{-n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Étudier la convergence de la suite.

CORRECTION 2

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x}$

a. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction f
b. Interpréter graphiquement les résultats

CORRECTION 3