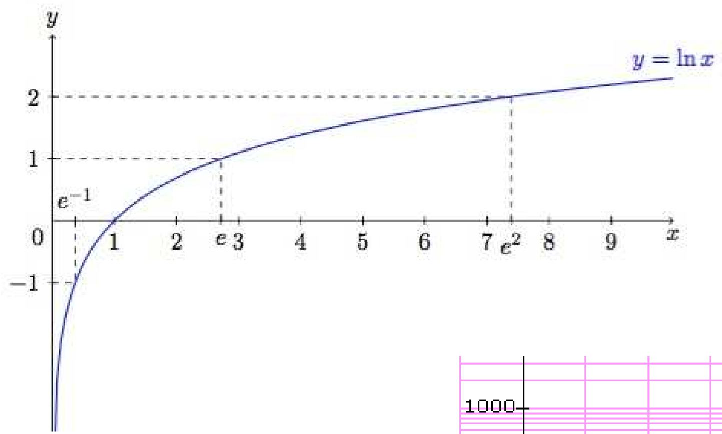
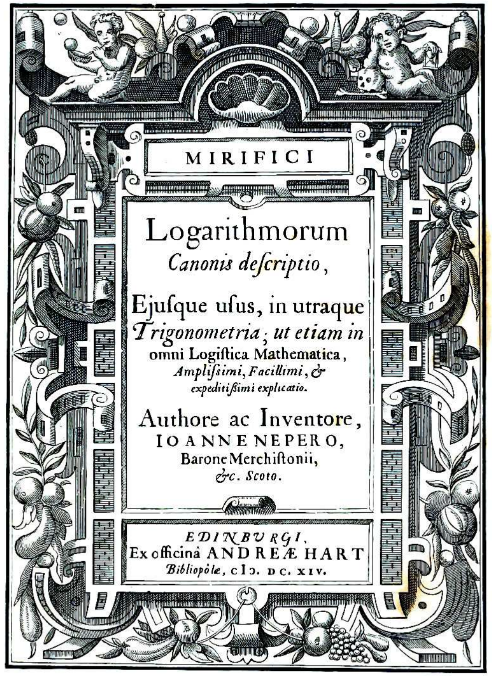
La fonction logarithme népérien



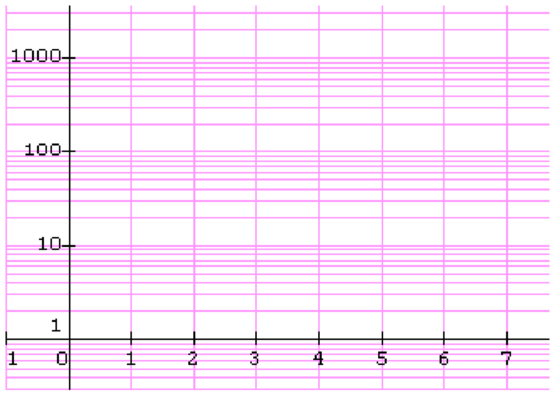

MIRIFICI

Logarithmorum
Canonis deſcriptio,

Ejuſque uſus, in utraque
Trigonometria; *ut etiam in*
omni Logiſtica Mathematica,
Ampliſsimi, Facillimi, &
expeditiſsimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii,
&c. Scoto.

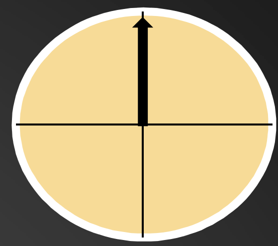
EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopôlæ, CIↃ. DC. XIV.



John NEPER
1550-1617

QUESTIONS FLASH

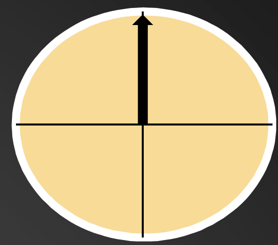
QUESTION 1



Résoudre l'inéquation

$$x^2 - 1 > 0$$

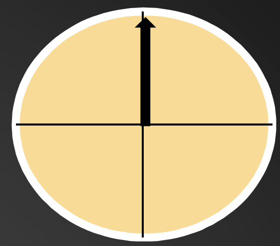
QUESTION 2



Résoudre l'équation

$$e^{x^2-1} = e^5$$

QUESTION 3

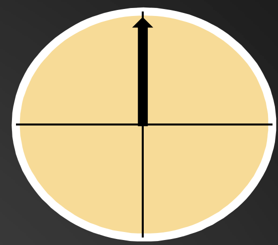


Justifier que l'équation

$$e^x = 5$$

possède une unique solution dans $\mathbb{R}$

QUESTION 4



La dérivée de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

- ☐ $f'(x) = e^{2x}$
- ☐ $f'(x) = e^{x^2}$
- ☐ $f'(x) = 2xe^{x^2}$

CORRECTION

QUESTION 1

Résoudre l'inéquation

$$x^2 - 1 > 0$$

QUESTION 2

Résoudre l'équation $e^{x^2-1} = e^5$

QUESTION 3

Justifier que l'équation

$$e^x = 5$$

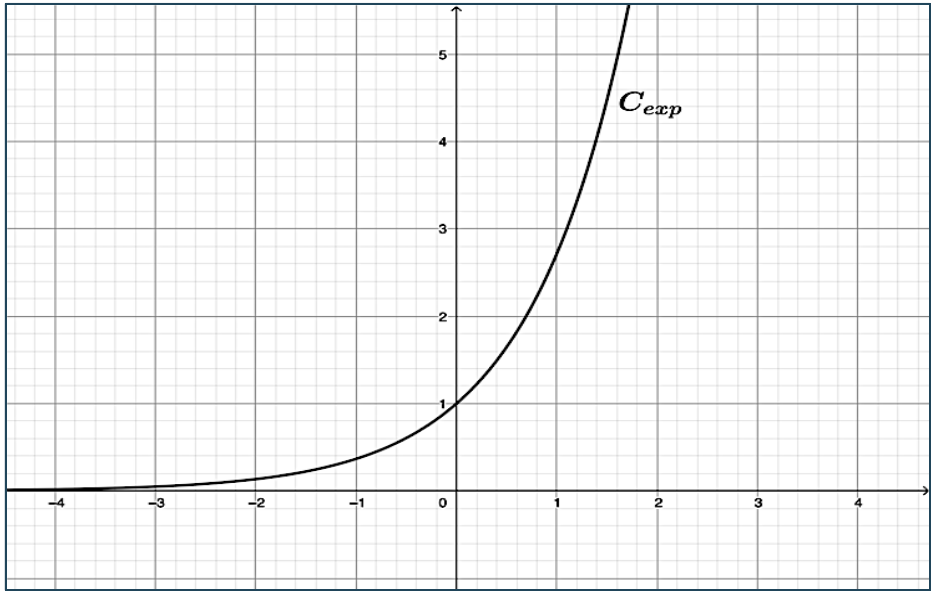
possède une unique solution dans $\mathbb{R}$

QUESTION 4

La dérivée de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

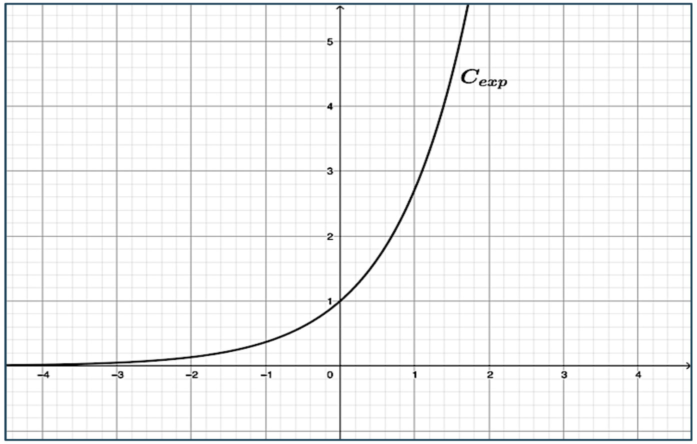
- ☐ $f'(x) = e^{2x}$
- ☐ $f'(x) = e^{x^2}$
- ☐ $f'(x) = 2xe^{x^2}$

De la fonction exponentielle…



Tout nombre réel strictement positif possède un unique antécédent par la fonction exp.

De la fonction exponentielle…



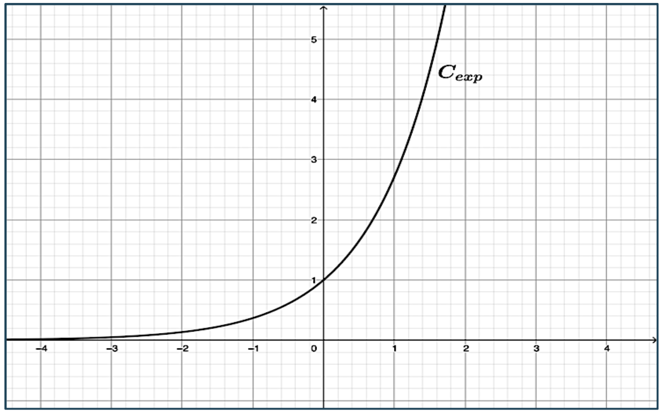
Tout nombre réel strictement positif possède un unique antécédent par la fonction $\exp$.

Définition

L'équation $e^x = a$ avec $a > 0$ possède une unique solution.

Cette solution est appelée logarithme népérien de a et notée $\ln(a)$ ou $\ln a$

… à la fonction logarithme népérien



On définit une nouvelle fonction qui à chaque réel a associe l'unique antécédent par la fonction $\exp$.

$$\mathbb{R} \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^+$$

$$x \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} y$$

… à la fonction logarithme népérien

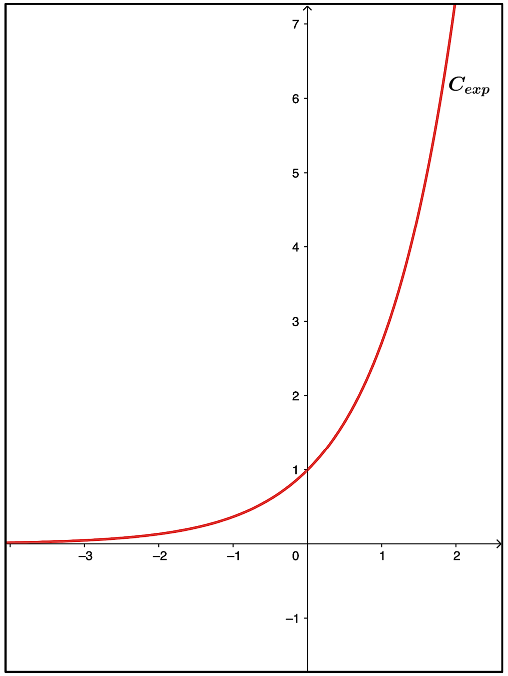
Application directe

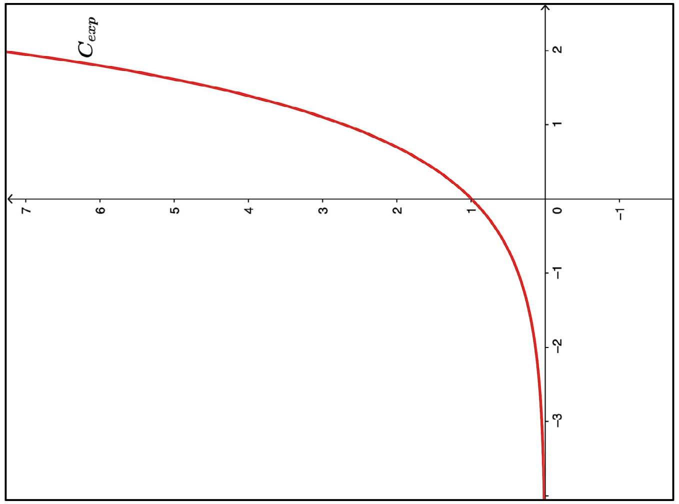
Résoudre les équations suivantes :

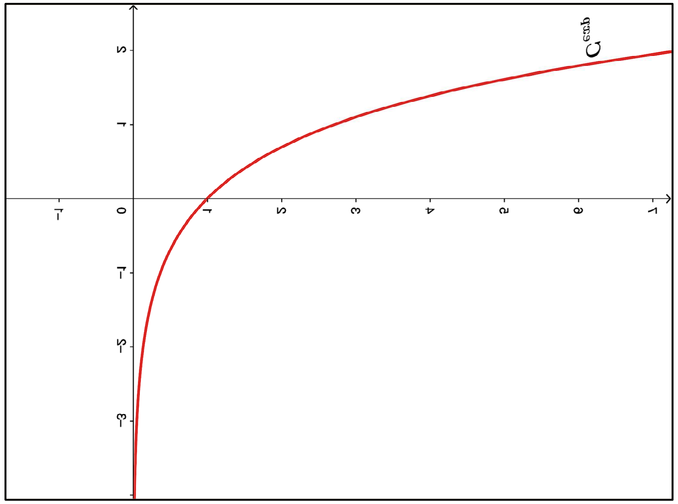
$$e^x = 5$$

$$\ln x = -2$$

De la fonction exponentielle…



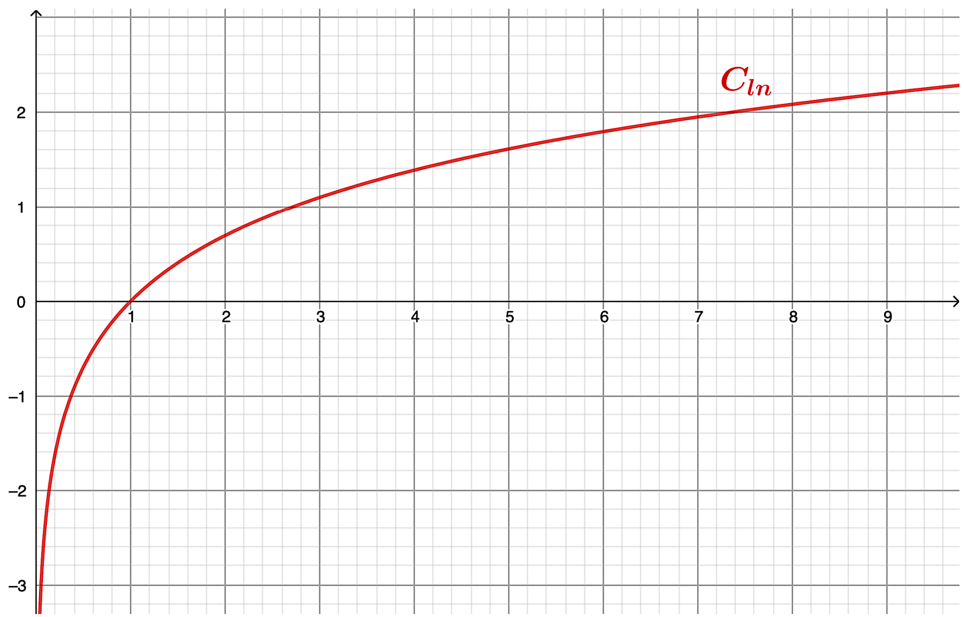




Il suffit de faire pivoter et de retourner la courbe de la fonction exp pour obtenir la courbe de la fonction ln .
On échange ainsi l'axe des abscisses et celui des ordonnées.

… à la fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien



- ✓ Domaine de définition
- ✓ Continuité
- ✓ Dérivabilité
- ✓ Variations
- ✓ Signe
- ✓ limites

Etude de la fonction ln

La fonction ln est dérivable, oui …
mais quelle est sa dérivée ?

Posons la fonction dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\ln x}$

Etude de la fonction ln

Propriété

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Propriétés algébriques

Propriété : Relation fonctionnelle

Pour tous réels a et b, strictement positifs,

$$\ln(ab) = \ln a + \ln \mathrm{b}$$

Démonstration

Propriétés algébriques

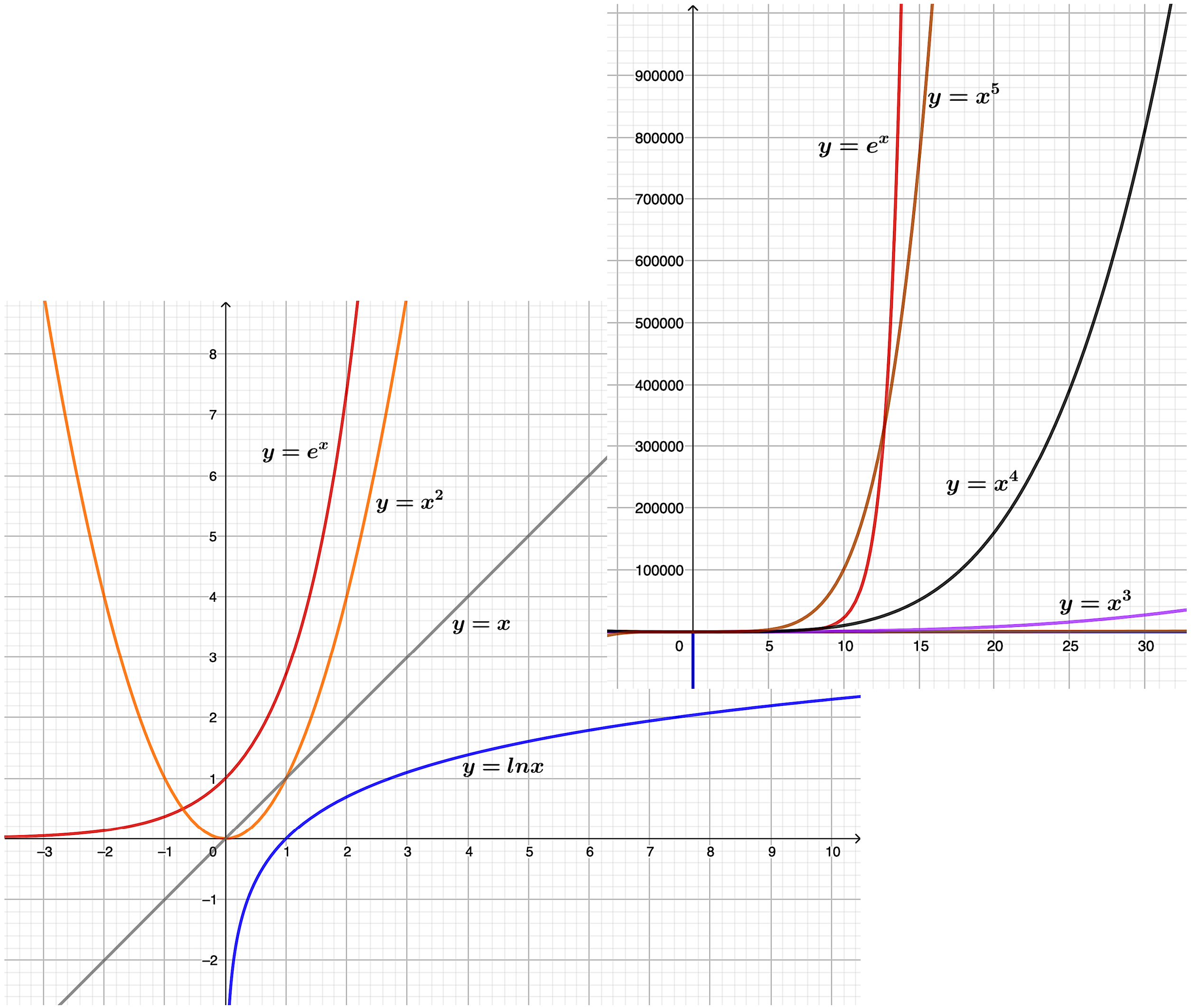
Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs

et tout entier relatif n

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln a^n = n \ln a$
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Croissances comparées



Théorème des croissances comparées

Pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0$$

EXERCICES

EXERCICE 1

$$A = \ln 8 + \ln 2\mathrm{e}$$

Exprimer A en fonction de $\ln 2$.

$$B = \frac{\ln \mathrm{e}^4 \times \ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}^{3 \ln 2}}$$

Montrer que B est un nombre décimal.

CORRECTION 1

$$A = \ln 8 + \ln 2e$$

Exprimer l'expression A en fonction de $\ln 2$.

$$B = \frac{\ln e^4 \times \ln e}{e^{3 \ln 2}}$$

Montrer que le nombre B est un nombre décimal.

EXERCICE 2

Dans une région, on observe une espèce en voie d'extinction. En 2020, il ne reste plus que 1 000 individus de cette espèce.

```python
def seuil():
    u=1000
    n=0
    while u>500 :
        u=0.95*u
        n=n+1
    return 2020+n
```

L'algorithme ci-contre permet de déterminer en quelle année la population aura baissé de moitié.
Résoudre une inéquation pour déterminer la valeur retournée par cet algorithme.

CORRECTION 2

```python
def seuil():
    u=1000
    n=0
    while u>500 :
        u=0.95*u
        n=n+1
    return 2020+n
```

L'algorithme ci-contre permet de déterminer en quelle année la population aura baissé de moitié.
Résoudre une inéquation pour déterminer la valeur retournée par cet algorithme.

$$\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)} \approx 13{,}5$$

EXERCICE 3

$$(E) : \ln(x-2) + \ln(x-1) = \ln 2$$

$$(F) : \ln[(x-2)(x-1)] = \ln 2$$

Ces deux équations ont-elles les mêmes solutions ?

CORRECTION 3

(E) : $\ln(x-2) + \ln(x-1) = \ln 2$

(F) : $\ln[(x-2)(x-1)] = \ln 2$