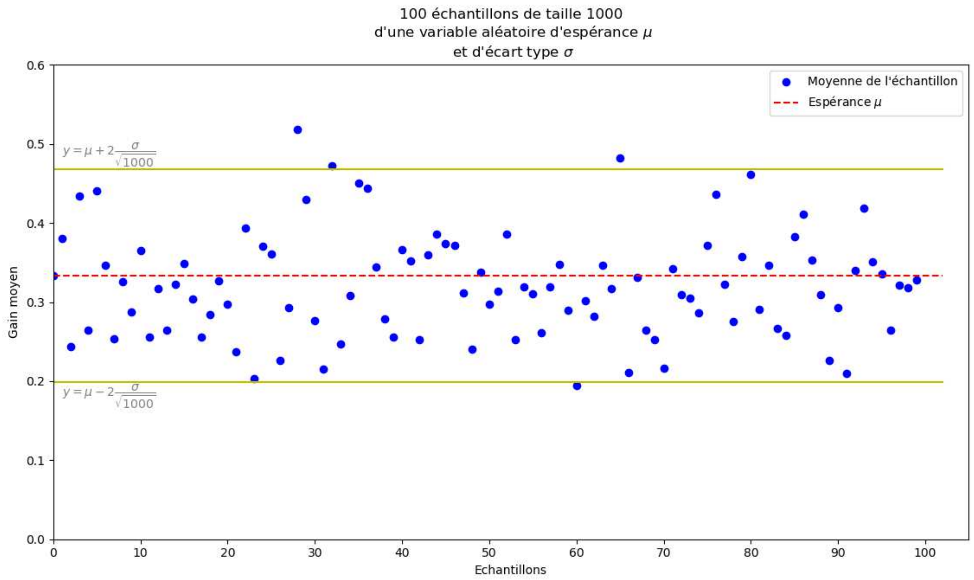
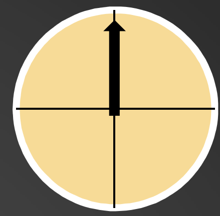
# DE LA MOYENNE À L'ESPÉRANCE ; ÉCART TYPE



# QUESTIONS FLASH

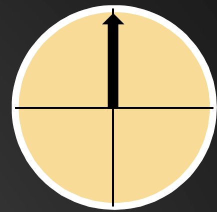
# QUESTION 1



On considère la série statistique $(1\ ;\ 2\ ;\ 7\ ;\ 7\ ;\ 9\ ;\ 10)$

Donner sa moyenne et son étendue.

# QUESTION 2

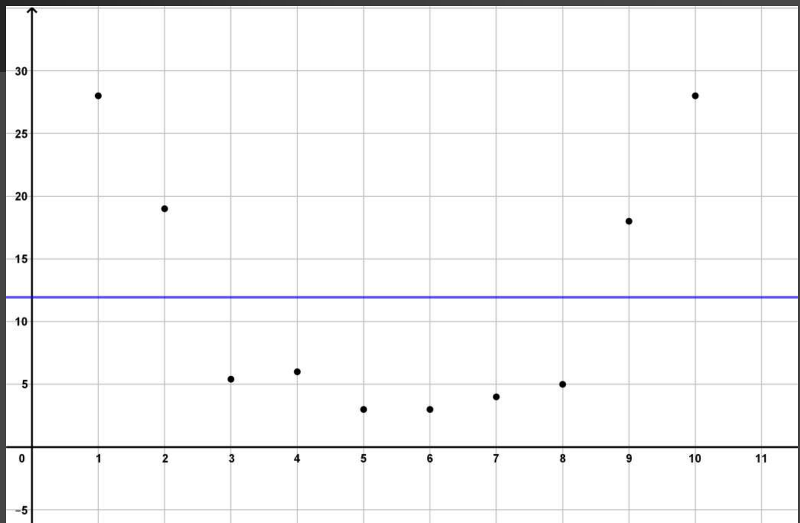


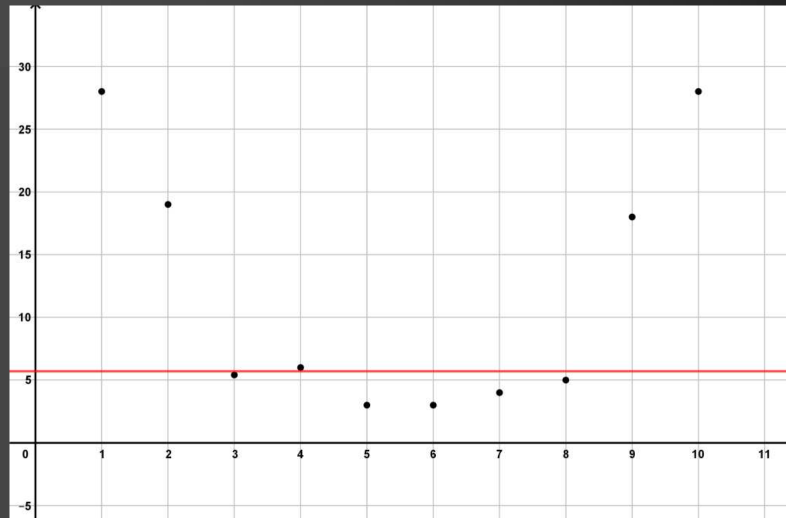
On représente une série statistique par un nuage de points.

Quel schéma ci-dessous représente:

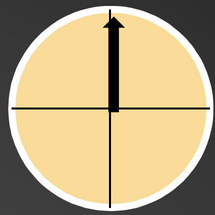
a. le nuage de points et la médiane ?

b. le nuage de points et la moyenne ?



# QUESTION 3



Un joueur doit miser 1 euro pour faire tourner la roue.

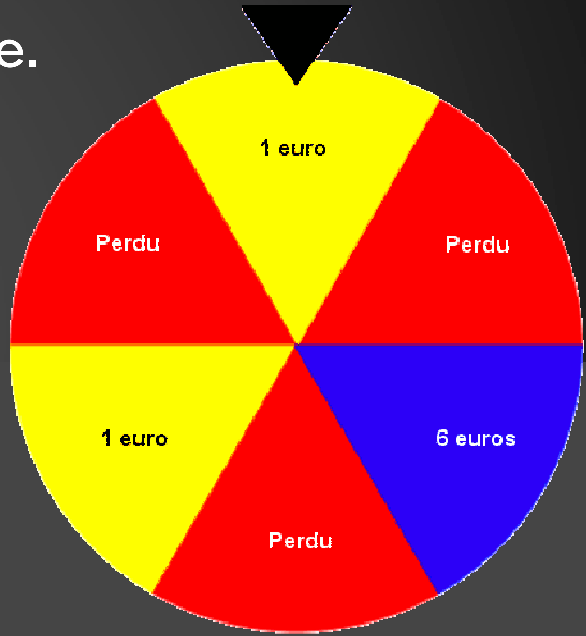
Eva joue 8 fois.

Elle tombe 3 fois sur « perdu »,

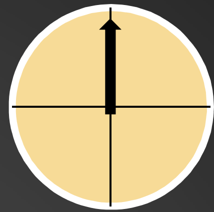
4 fois sur « 1 euro »

et 1 fois sur « 6 euros ».

Quel est son gain moyen par partie?



# QUESTION 4



Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X. Quelle est la valeur manquante ?

| **Valeurs $x_i$ prises par $X$** | $-2$ | $3$ | $5$ | $12$ | $20$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Probabilités $P(X = x_i)$** | $0,2$ | $0,1$ | $0,4$ | … | $0,1$ |

# CORRECTION

# QUESTION 1

On considère la série statistique $(1\,;\ 2\,;\ 7\,;\ 7\,;\ 9\,;\ 10)$

Donner sa moyenne et son étendue.

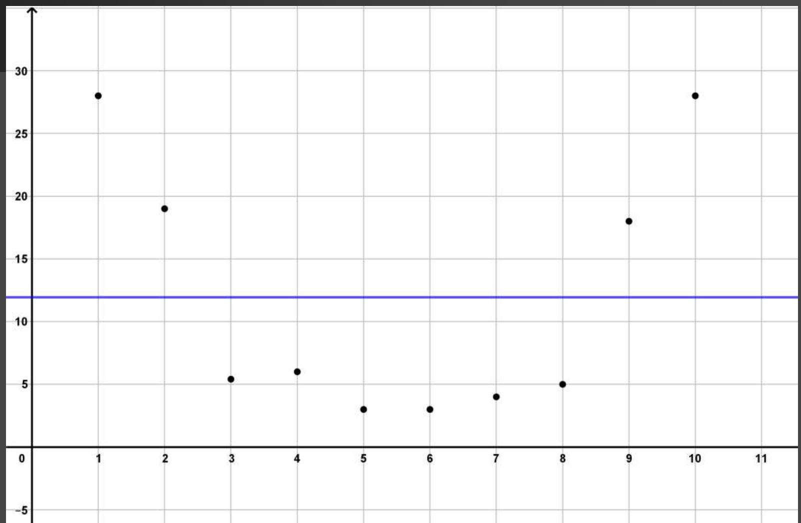
# QUESTION 2

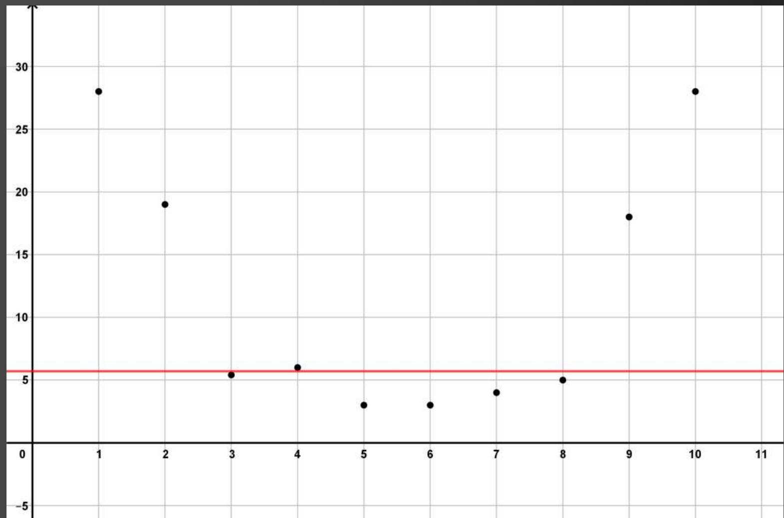
On représente une série statistique par un nuage de points.

Quel schéma ci-dessous représente:

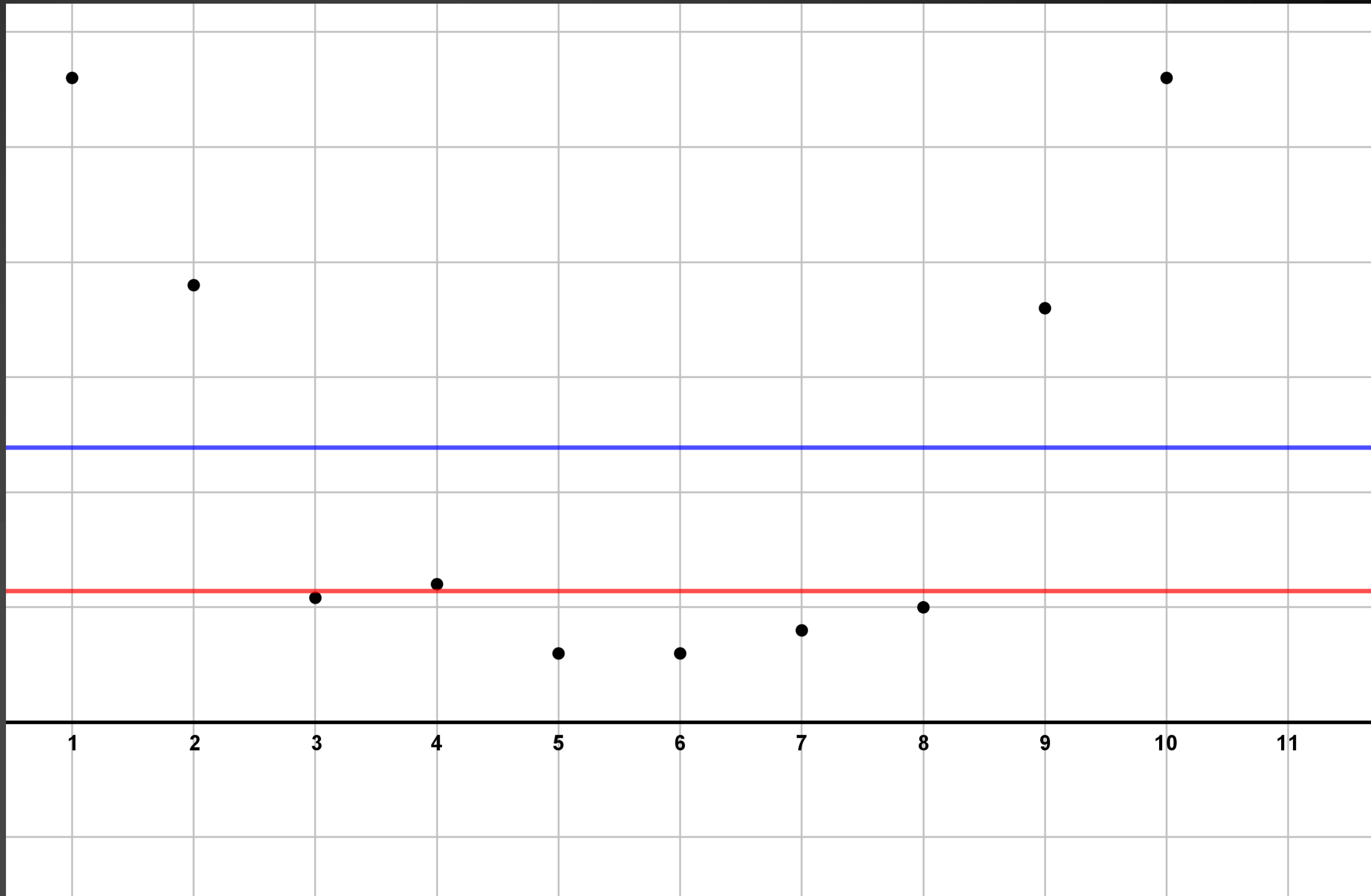
a. le nuage de points et la médiane ?

b. le nuage de points et la moyenne ?

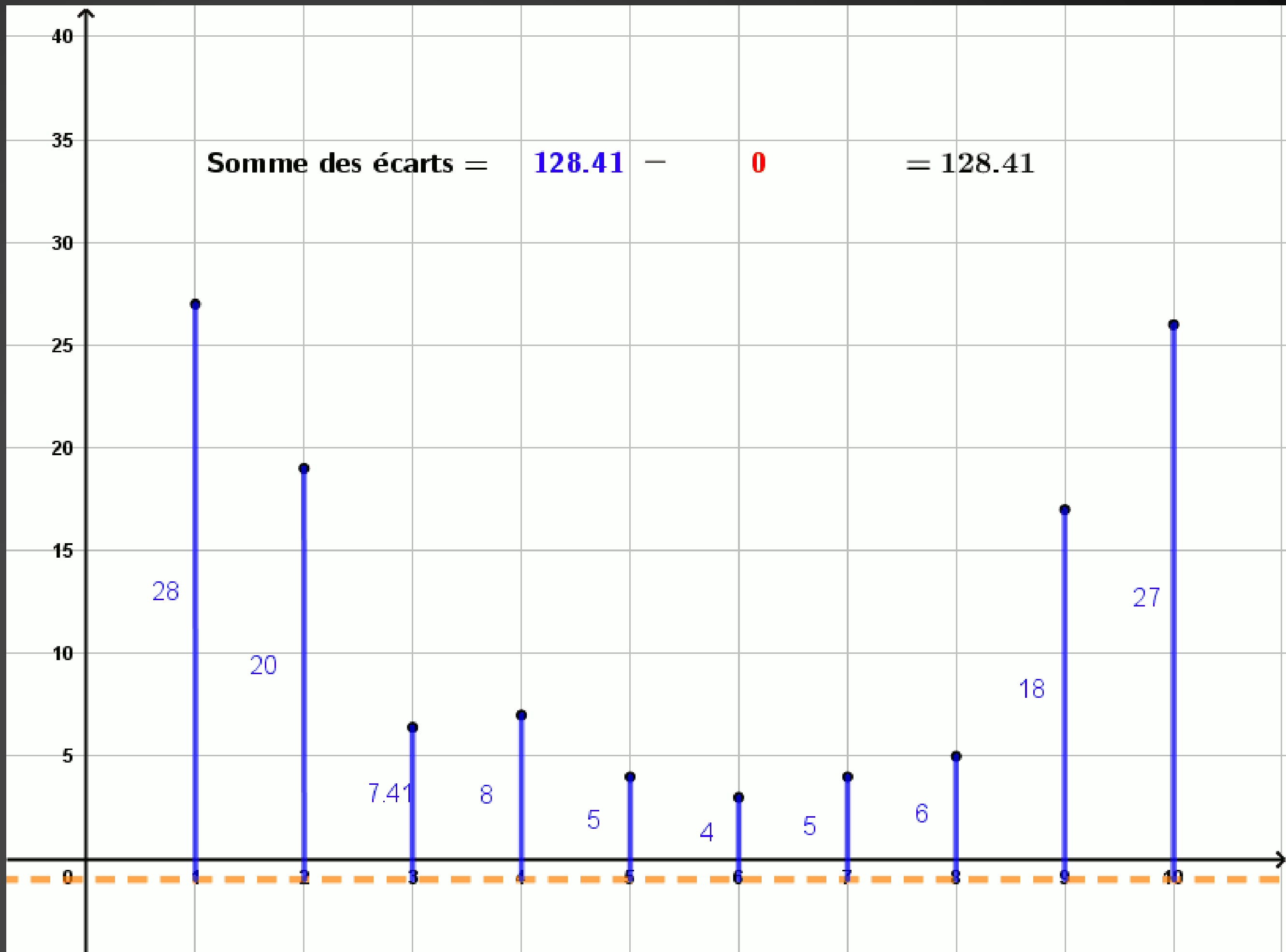


# QUESTION 2

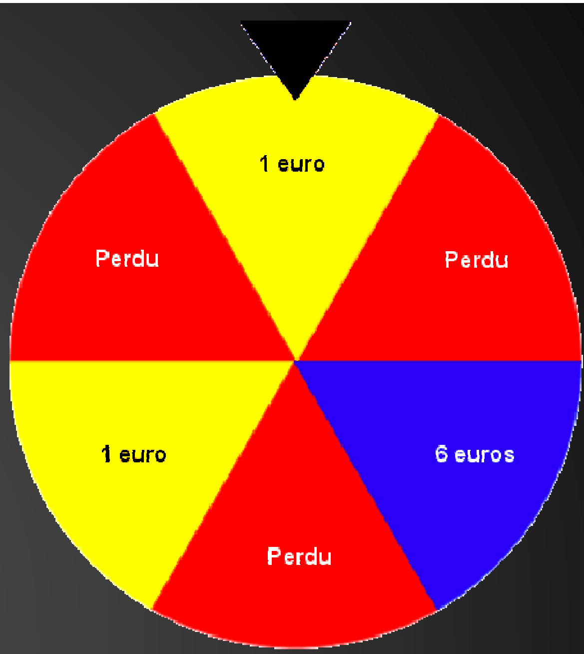


# QUESTION 2



# QUESTION 3

Un joueur doit miser 1 euro pour faire tourner la roue. Eva joue 8 fois.
Elle tombe 3 fois sur « perdu »,
4 fois sur « 1 euro »
et 1 fois sur « 6 euros ».
Quel est son gain moyen par partie?



# QUESTION 4

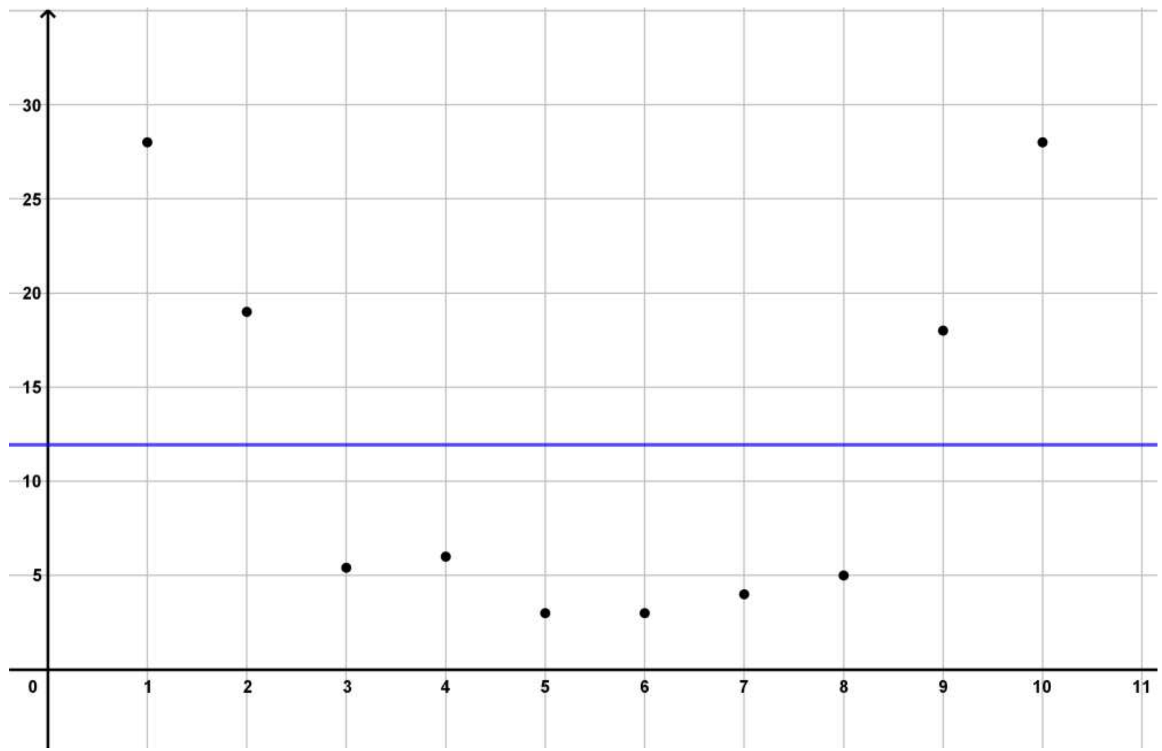
Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X. Quelle est la valeur manquante?

| **Valeurs $x_i$ prises par $X$** | $-2$ | $3$ | $5$ | $12$ | $20$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Probabilités** $P(X = x_i)$ | $0,2$ | $0,1$ | $0,4$ | | $0,1$ |

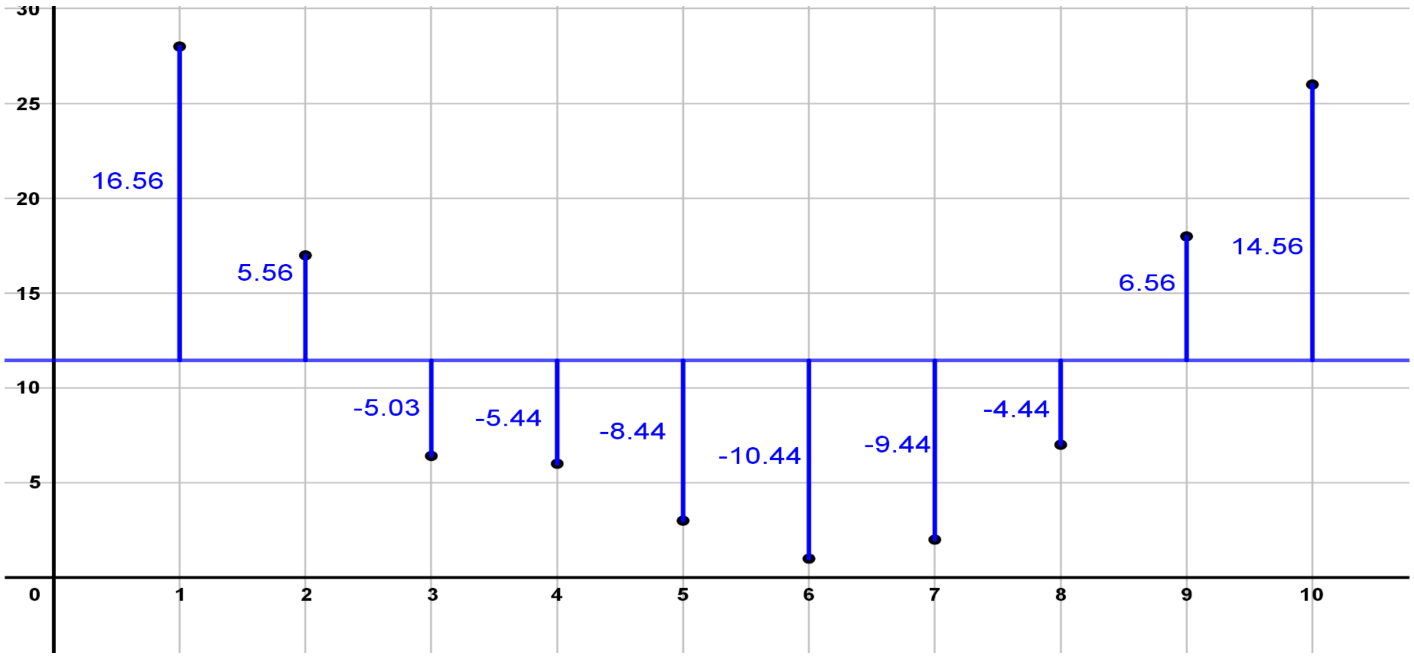
# Moyenne

La moyenne d'une série statistique $(x_1; x_2 ; \dots ; x_N)$ est

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$$



# Écart type




La variance est le réel $V = \dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$

L'écart-type est le réel $\sigma = \sqrt{V}$

# Comparer deux séries: moyenne et écart type

# Comparer deux séries: moyenne et écart type

## Pluviométrie à Barcelone

| Mois | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai | Juin | Juillet | Aout | Septembre | Octobre | Novembre | Décembre |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Précipitation (mm) | 39 | 36 | 45 | 48 | 52 | 42 | 25 | 51 | 73 | 93 | 59 | 49 |

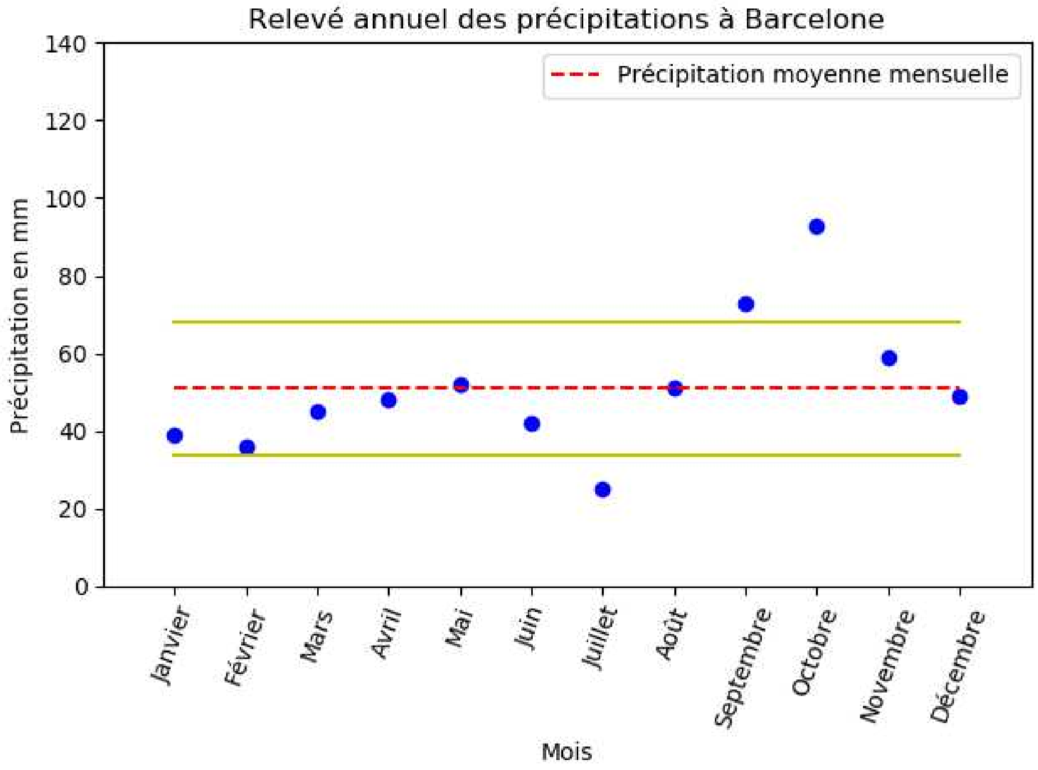
Moyenne : 51 mm Ecart type : 17 mm

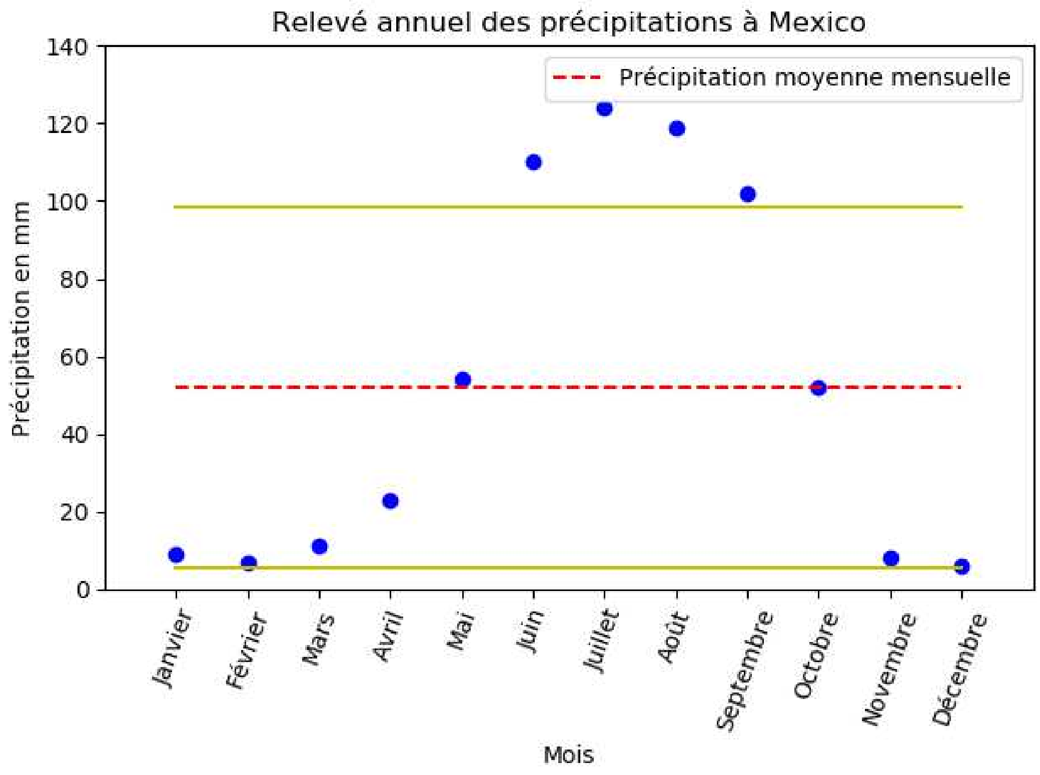
## Pluviométrie à Mexico

| Mois | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai | Juin | Juillet | Aout | Septembre | Octobre | Novembre | Décembre |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Précipitation (mm) | 9 | 7 | 11 | 23 | 54 | 110 | 124 | 119 | 102 | 52 | 8 | 6 |

Moyenne : 52 mm Ecart type : 47 mm

# Comparer deux séries: moyenne et écart type



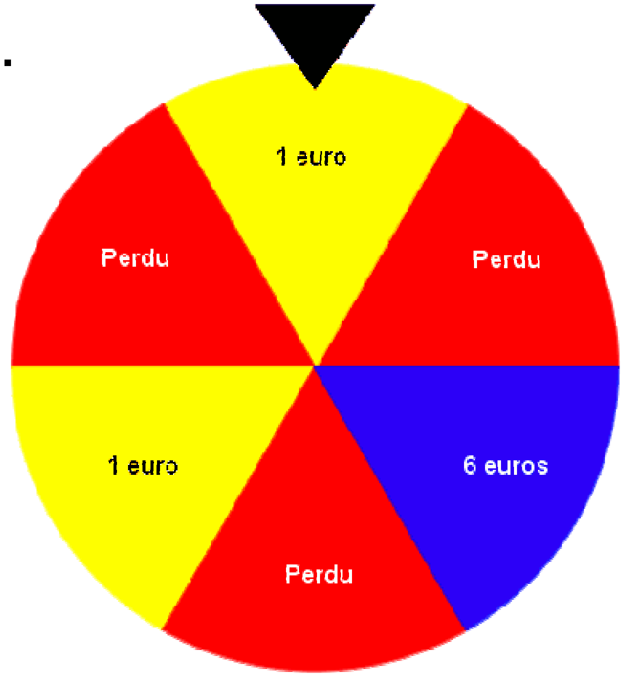



# Moyenne

# Moyenne

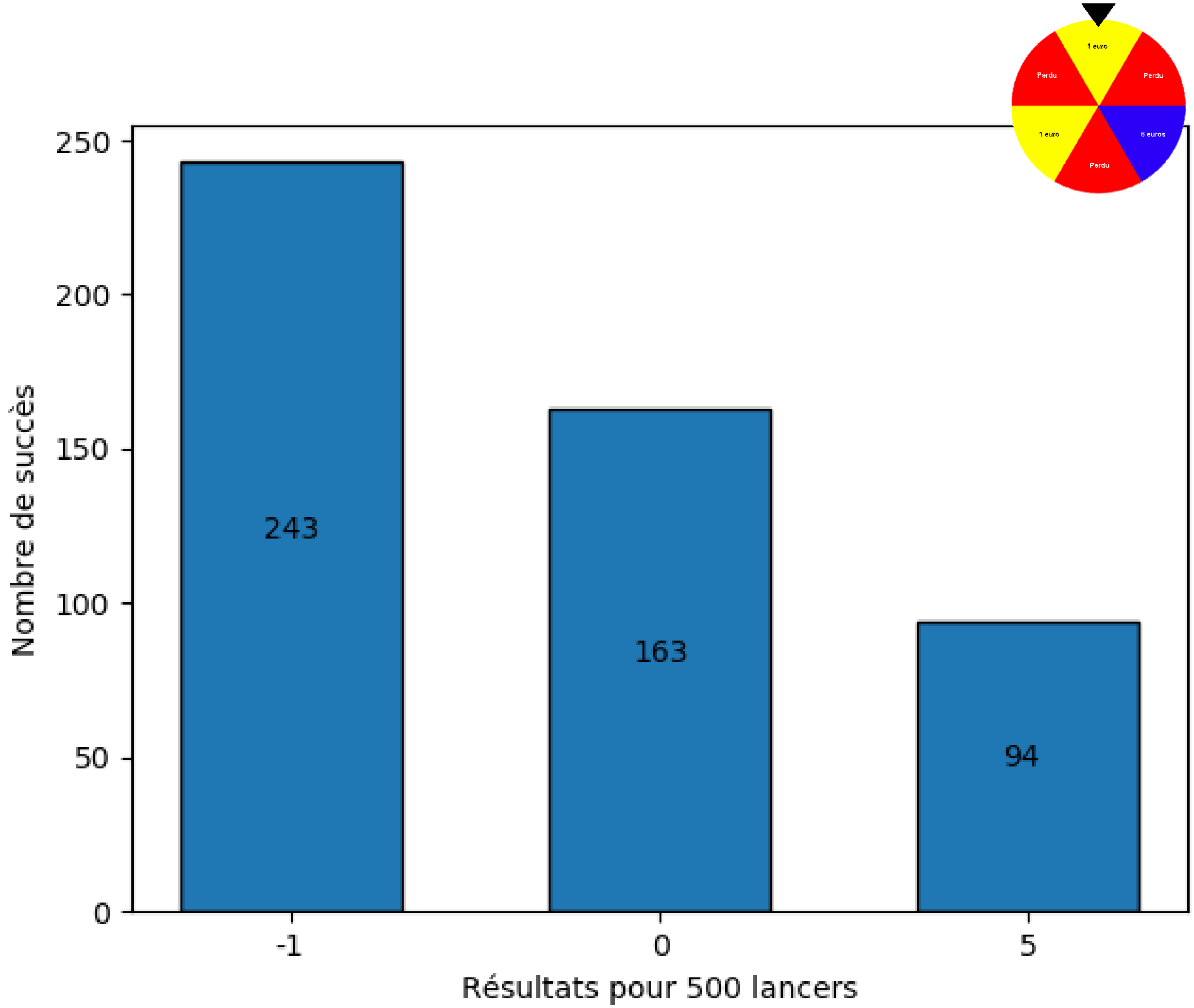
On mise un euro pour faire tourner la roue ci-contre.

On simule 500 parties.



# Moyenne

| Gain | $-1$ | $0$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| Fréquence | $\frac{243}{500}$ | $\frac{163}{500}$ | $\frac{94}{500}$ |



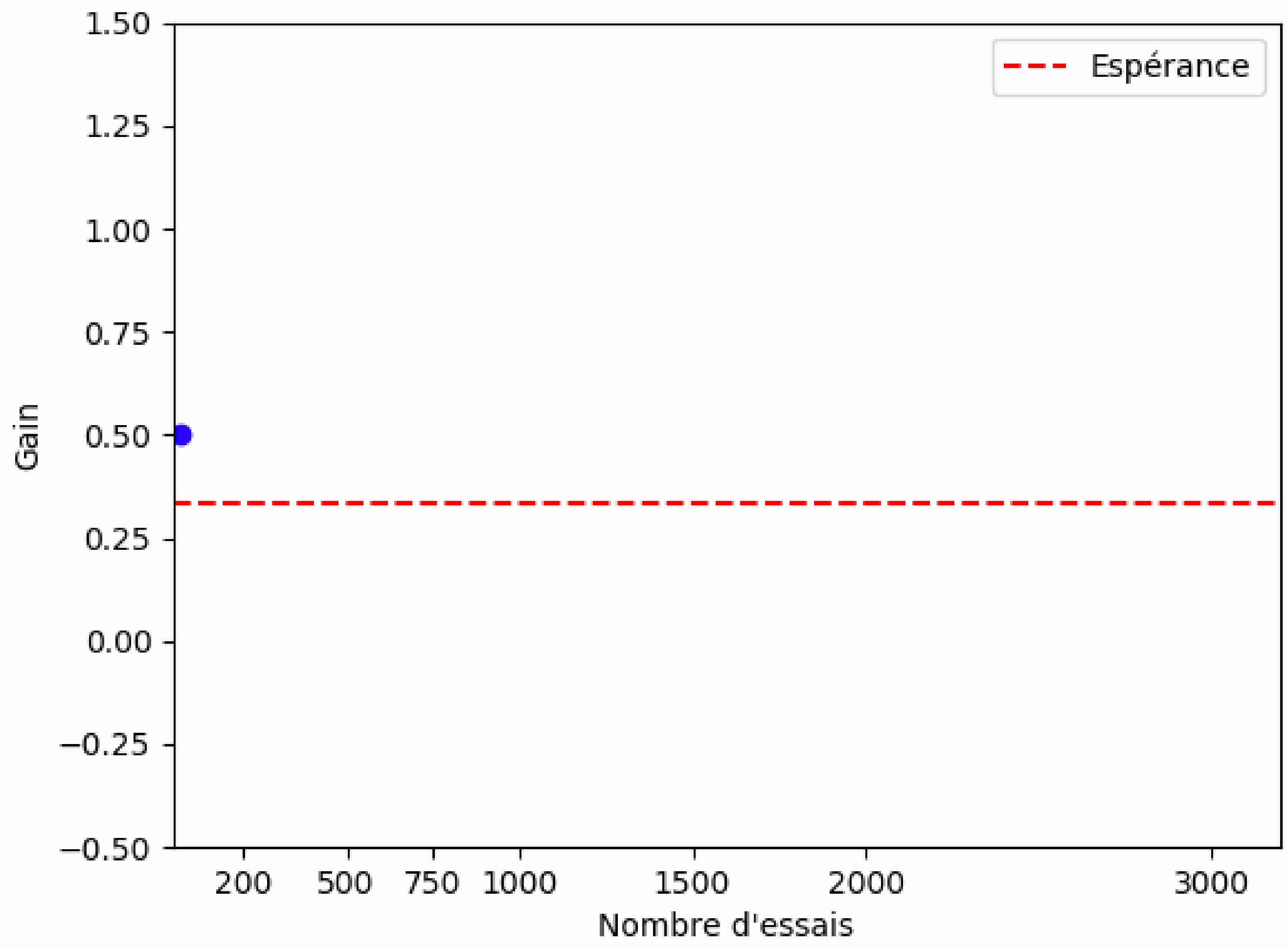
# Moyenne, variance, écart-type

| Valeur | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_N$ |
|---|---|---|---|---|
| Fréquence | $f_1$ | $f_2$ | $\cdots$ | $f_N$ |

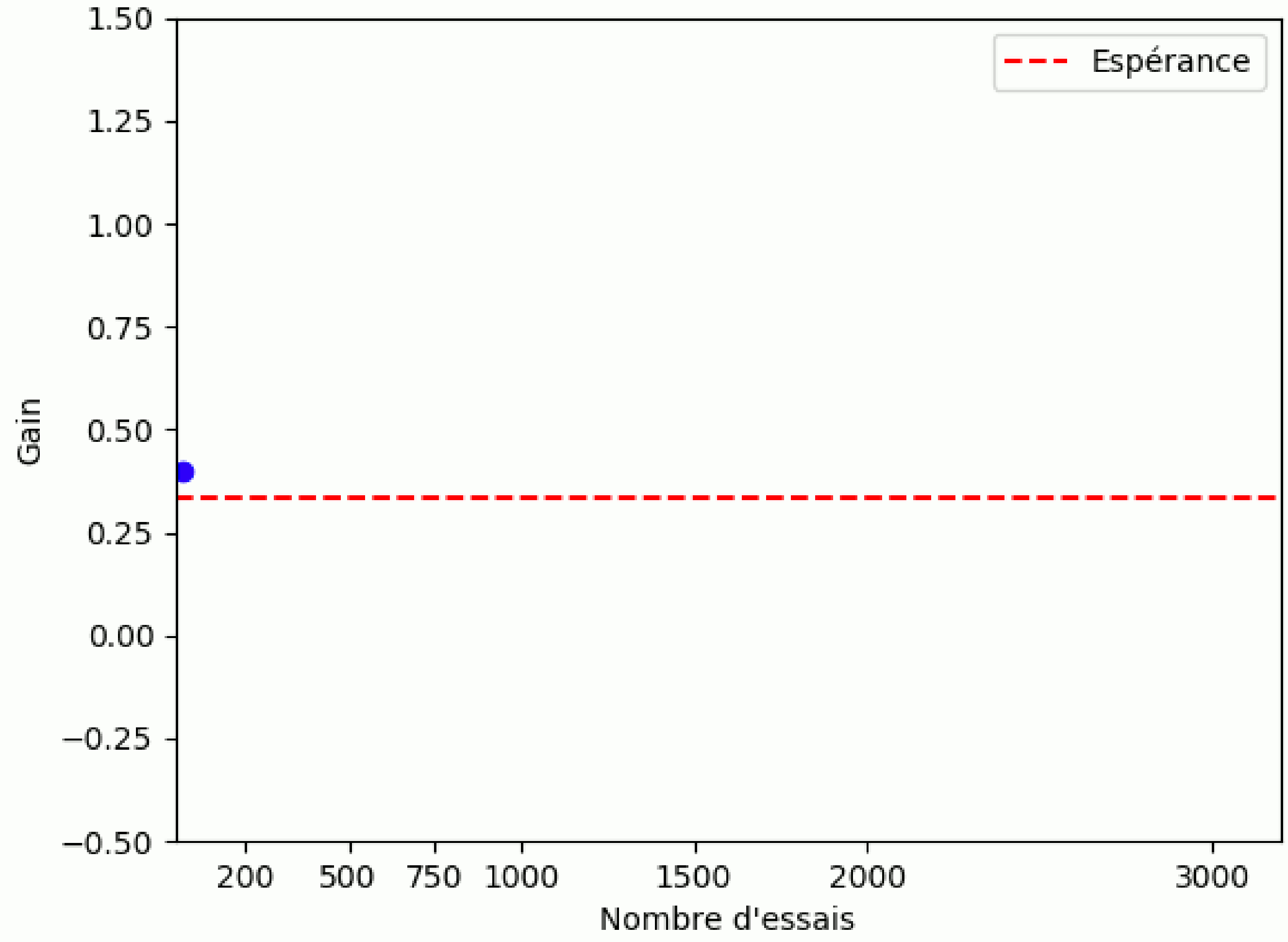
Calcul de la moyenne: $\bar{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_N \times x_N$

# De la moyenne à l’espérance

# De la moyenne à l'espérance



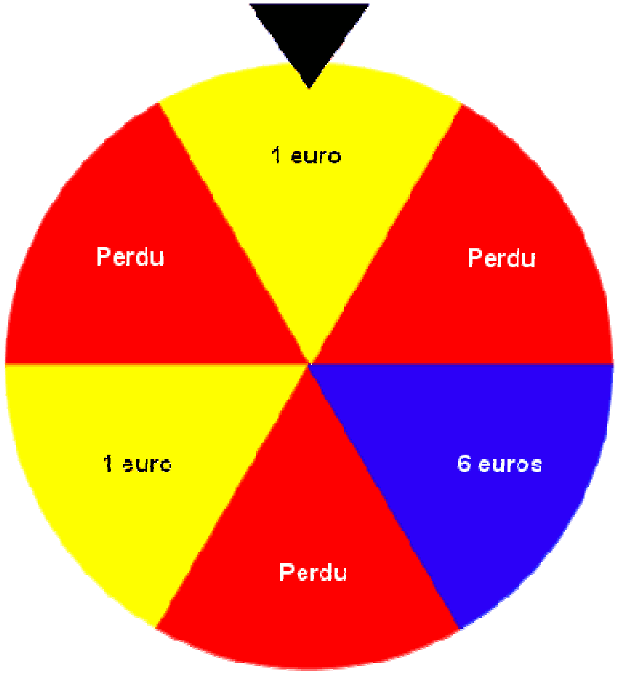
# De la moyenne à l’espérance



# Modélisation par une variable aléatoire

# Modélisation par une variable aléatoire

On mise un euro pour faire tourner la roue ci-contre.

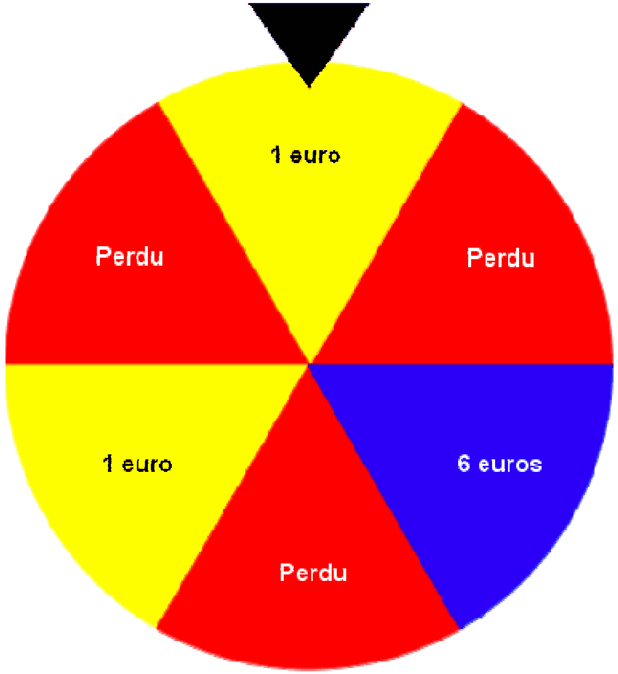



On considère la variable aléatoire $X$ qui, au résultat de l'expérience aléatoire, associe le gain algébrique.

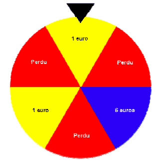
# Modélisation par une variable aléatoire

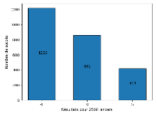
Loi de la variable aléatoire $X$:

| Valeurs $\boldsymbol{x_i}$ prises par $\boldsymbol{X}$ | | | |
|---|---|---|---|
| Probabilités $\boldsymbol{P(X = x_i)}$ | | | |



# De la moyenne à l'espérance



Simulation de 2500 parties 

| gain | $-1$ | $0$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| fréquence | $\frac{1220}{2500}$ | $\frac{861}{2500}$ | $\frac{419}{2500}$ |

$$\text{Moyenne} = \frac{1220}{2500} \times (-1) + \frac{861}{2500} \times 0 + \frac{419}{2500} \times 5$$

$$\approx 0{,}49 \times (-1) + 0{,}34 \times 0 + 0{,}17 \times 5$$

Loi de probabilité de la variable aléatoire $X$

| Valeurs $x_i$ prises par $X$ | $-1$ | $0$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

$$\text{Espérance} = \frac{1}{2} \times (-1) \quad + \quad \frac{1}{3} \times 0 \quad + \quad \frac{1}{6} \times 5$$

$$= \frac{1}{3}$$

# Espérance d'une variable aléatoire

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un univers fini $\Omega$.

| Valeurs $\boldsymbol{x_i}$ prises par $X$ | $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\dots$ | $\boldsymbol{x_n}$ |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ |

L'espérance de la variable aléatoire $X$ est le réel noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n$$

# Écart type d'une variable aléatoire

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un univers fini $\Omega$.

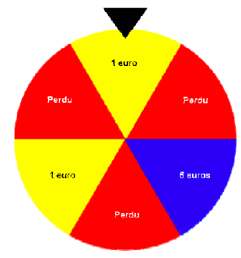
| Valeurs $\boldsymbol{x_i}$ prises par $X$ | $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\dots$ | $\boldsymbol{x_n}$ |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ |

La variance de la variable aléatoire $X$ est le réel positif noté $V(X)$ défini par:

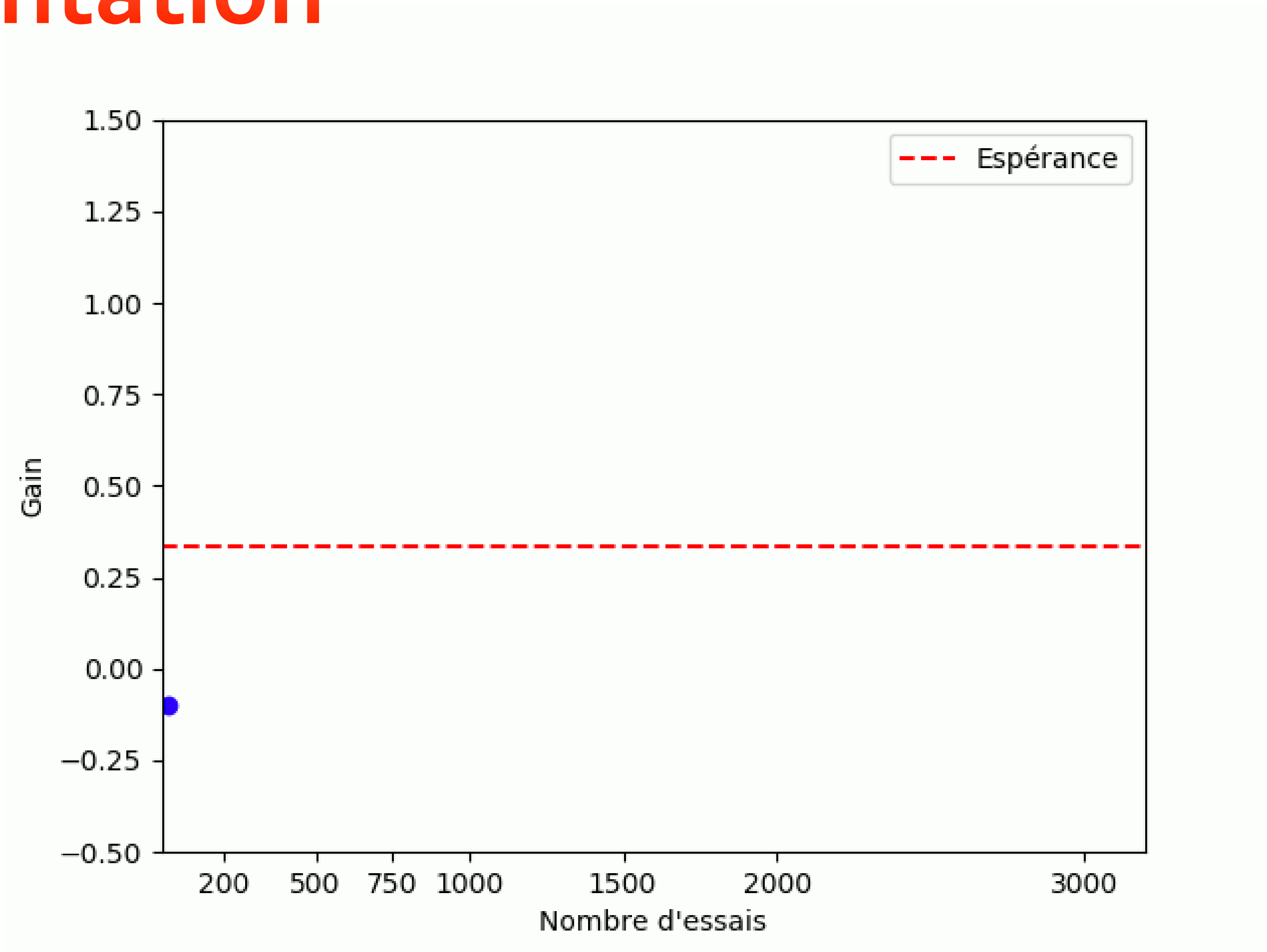
$$V(X) = p_1 \times \left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2 \times \left(x_2 - E(X)\right)^2 + \cdots + p_n \times \left(x_n - E(X)\right)^2$$

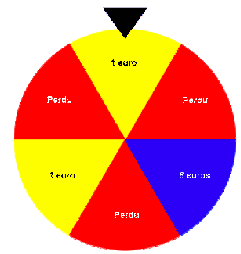
L'écart-type, noté $\sigma(X)$, est le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

# Expérimentation



# Expérimentation



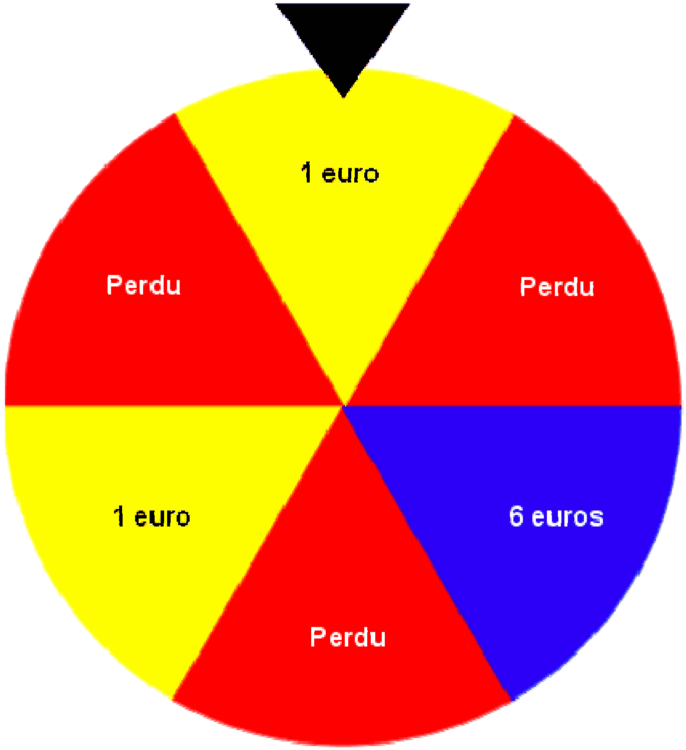



# Expérimentation

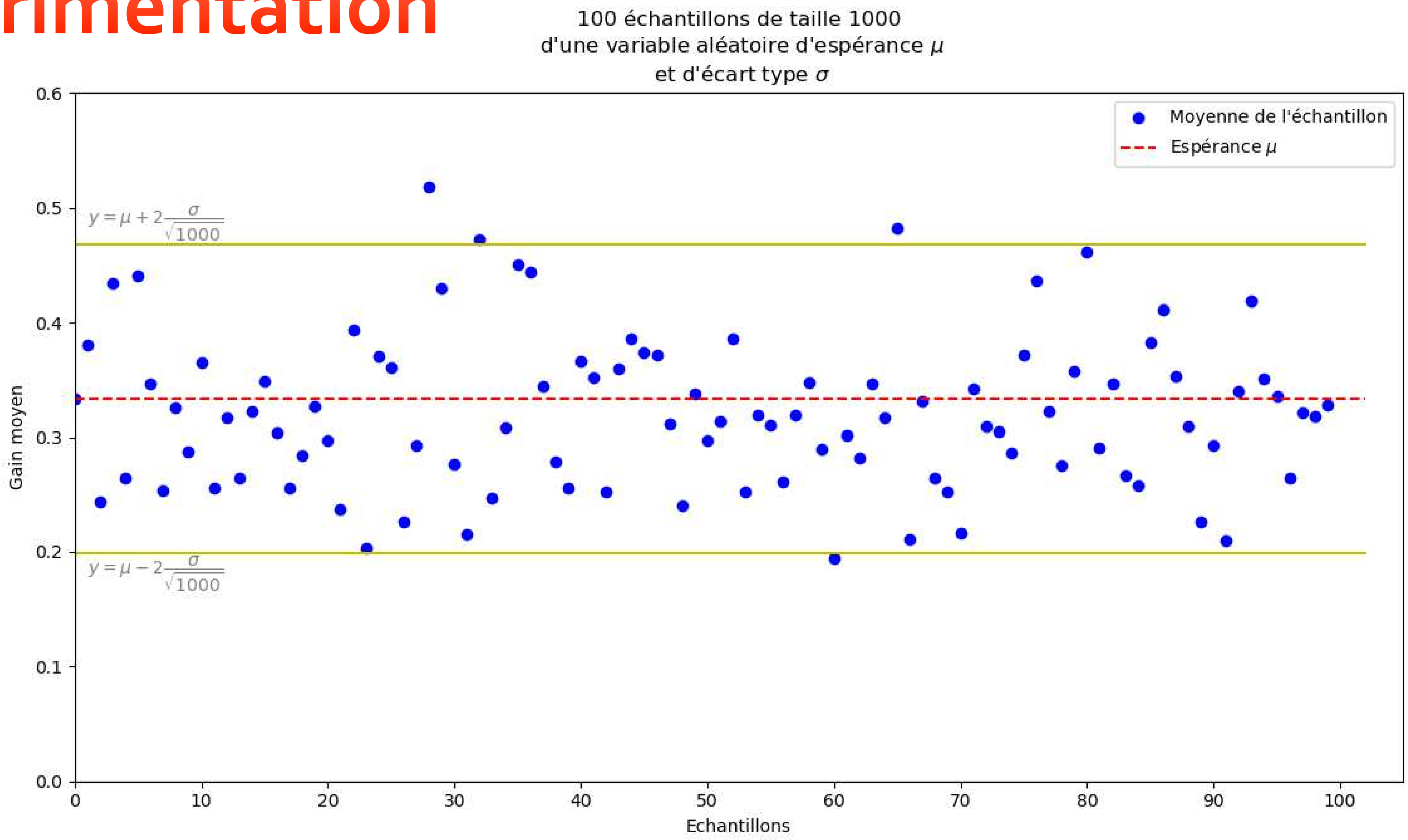
```python
from random import randint
gain=[-1,-1,-1,0,0,5]

def echantillon(taille):
    sommeGain=0
    for i in range(taille):
        roue=randint(0,5)
        sommeGain=sommeGain+gain[roue]
    return sommeGain/taille

def simulation(repetition,taille):
    listGain=[]
    for i in range(repetition):
        listGain.append(echantillon(taille))
    return listGain
```



# Expérimentation



# LE VRAI-FAUX

# Affirmation 1

Au jeu de la roulette les 37 issues sont équiprobables.

Lorsqu'on mise 1€ sur « rouge » ou sur « noir »,

on gagne 2€ si un numéro de la couleur choisie sort

sinon on perd sa mise.

Lorsqu'on mise 1€ sur un numéro, on gagne 36€ s'il sort,

sinon on perd sa mise.

***Affirmation 1:***

« Il vaut mieux jouer au deuxième jeu. »

# Affirmation 1


**Jeu 1 (couleur)**

Lorsqu'on mise 1€ sur « rouge » ou « noir » ,

on gagne 2€ si un numéro de la couleur choisie sort

sinon on perd sa mise.

Soit $X$ la variable aléatoire qui, au résultat

du tirage, associe le gain algébrique.

| | | |
|---|---|---|
| Valeurs $\boldsymbol{x_i}$ prises par $\boldsymbol{X}$ | | |
| Probabilités $\boldsymbol{P(X = x_i)}$ | | |

# Affirmation 1

**Jeu 1 (couleur) :**

| Valeurs $\boldsymbol{x_i}$ prises par $\boldsymbol{X}$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| Probabilités $\boldsymbol{P(X = x_i)}$ | $\frac{19}{37}$ | $\frac{18}{37}$ |

$$\mathrm{V}(X) = \frac{19}{37}\left(-1+\frac{1}{37}\right)^2 + \frac{18}{37}\left(1+\frac{1}{37}\right)^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 1$$

# Affirmation 1

**Jeu 2 (numéro)**

Lorsqu'on mise 1€ sur un numéro, on gagne 36€ s'il sort, sinon on perd sa mise.

Soit $Y$ la variable aléatoire qui, au résultat du tirage, associe le gain algébrique.

| | | |
|---|---|---|
| Valeurs $\boldsymbol{y_i}$ prises par $\boldsymbol{Y}$ | | |
| Probabilités $\boldsymbol{P(Y = y_i)}$ | | |

# Affirmation 1

**Jeu 2 (numéro) :**

| Valeurs $y_i$ prises par $Y$ | $-1$ | $35$ |
|---|---|---|
| Probabilités $P(Y = y_i)$ | $\frac{36}{37}$ | $\frac{1}{37}$ |


$$\mathrm{V}(Y) = \frac{36}{37}\left(-1+\frac{1}{37}\right)^2 + \frac{1}{37}\left(35+\frac{1}{37}\right)^2$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx 5{,}8$$

# Affirmation 1

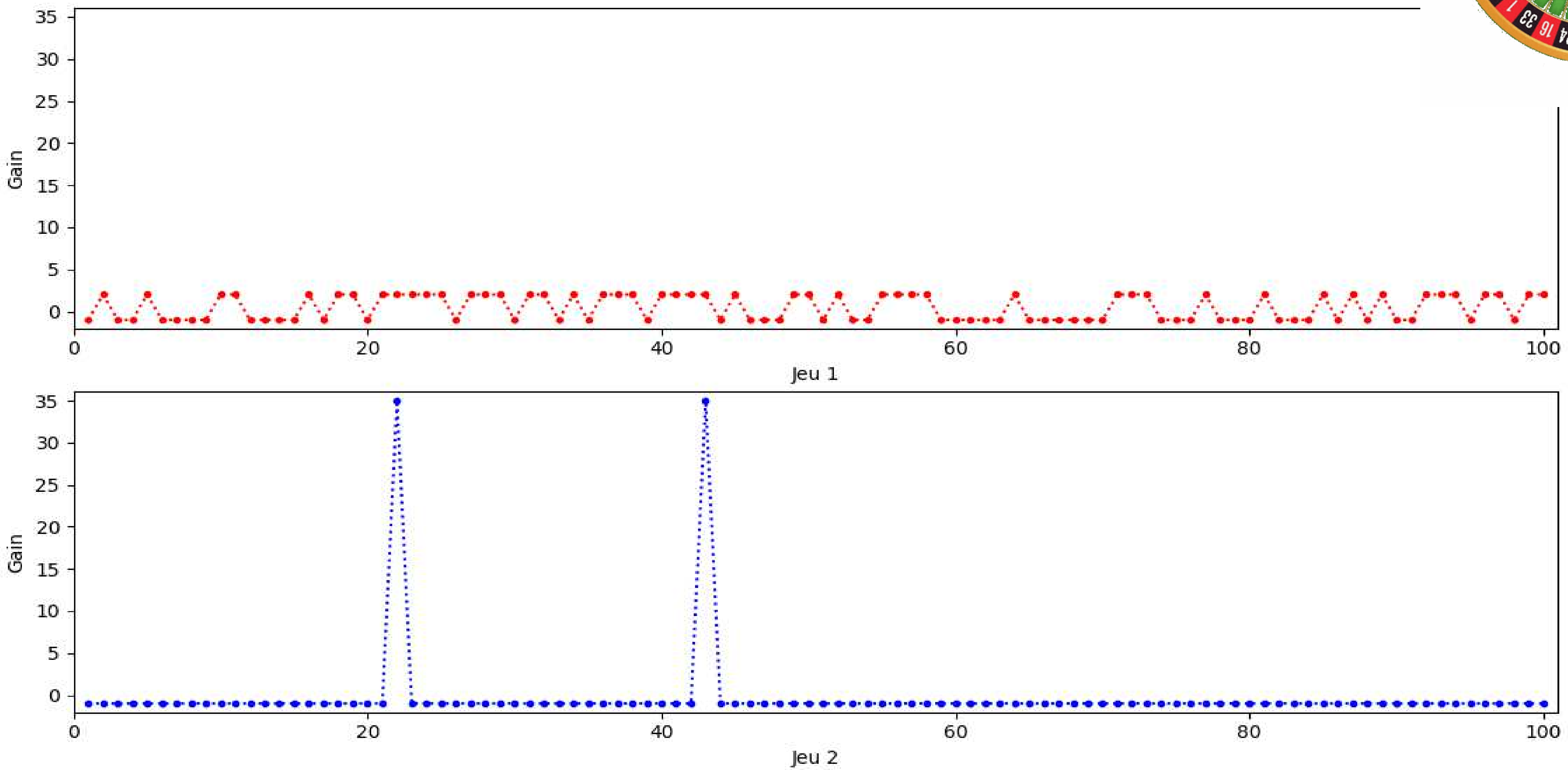
***Affirmation 1:***

« Il vaut mieux jouer au deuxième jeu. »

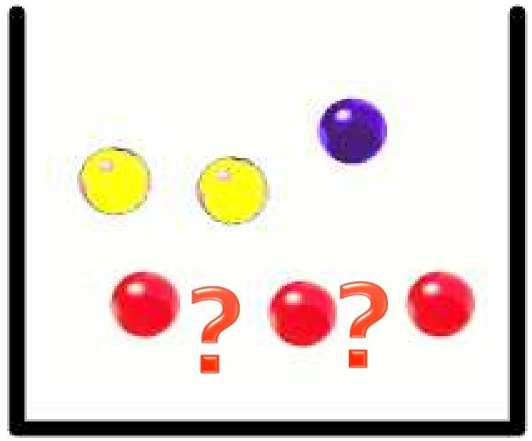

| | **Jeu 1 (couleur)** | **Jeu 2 (numéro)** |
|---|---|---|
| Gain maximal | $1$ € | $35$ € |
| Espérance | $-\frac{1}{37}$ € | $-\frac{1}{37}$ € |
| Écart type | 1€ | 5,8 € |

# Affirmation 1

***Affirmation 1:*** « Il vaut mieux jouer au deuxième jeu. »



# Affirmation 2



Une urne contient des jetons: deux jaunes, un bleu

et $n$ jetons rouges.

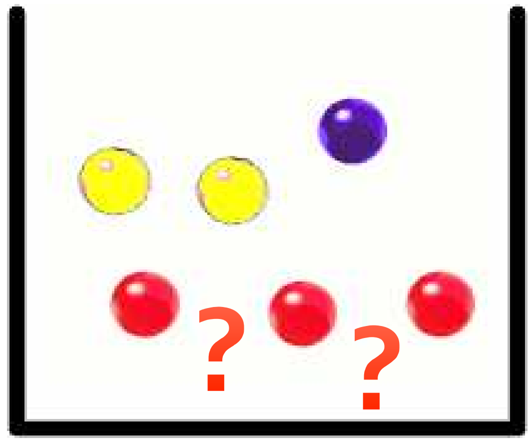
Un jeu consiste à prendre un jeton au hasard.

À chaque tirage , on gagne 10 € pour un jeton jaune, 4 € pour un jeton bleu mais on perd 3 € pour un jeton rouge.

***Affirmation 2:***

« Il existe une valeur de $n$ pour laquelle le jeu est équitable. »

# Affirmation 2



1 jeton bleu, 2 jaunes, $n$ rouges.

À chaque tirage , on gagne 10 € pour un jeton jaune,

4 € pour un jeton bleu mais on perd 3 € pour un jeton rouge.

Soit $X$ la variable aléatoire qui, au résultat

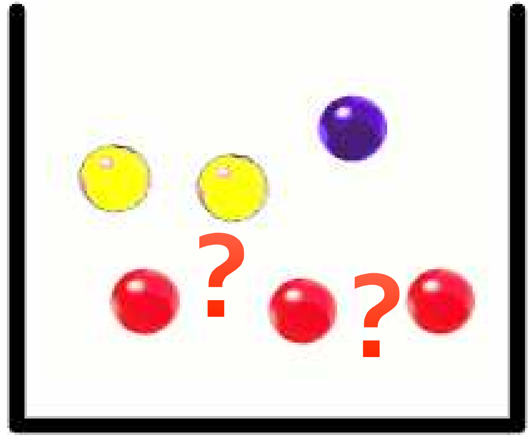
du tirage, associe le gain algébrique.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Valeurs $\boldsymbol{x_i}$ prises par $\boldsymbol{X}$ | | | |
| Probabilités $\boldsymbol{P(X = x_i)}$ | | | |

# Affirmation 2

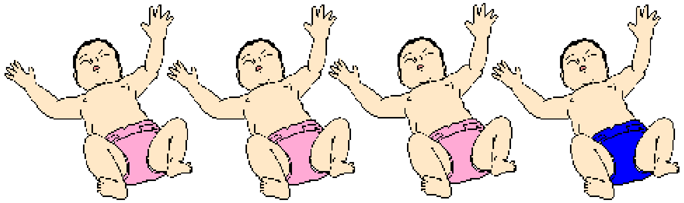
***Affirmation 2:***

« Il existe une valeur de $n$ pour laquelle le jeu est équitable. »




| | | | |
|---|---|---|---|
| Valeurs $\boldsymbol{x_i}$ prises par $\boldsymbol{X}$ | $-3$ | $4$ | $10$ |
| Probabilités $\boldsymbol{P(X = x_i)}$ | $\dfrac{n}{n+3}$ | $\dfrac{1}{n+3}$ | $\dfrac{2}{n+3}$ |

# Affirmation 3



Dans un pays imaginaire, le gouvernement impose la politique nataliste suivante :

Tout couple désireux d'avoir des enfants devra

Article 1 : s'arrêter à la naissance du premier garçon ;

Article 2 : se limiter à quatre enfants par famille;

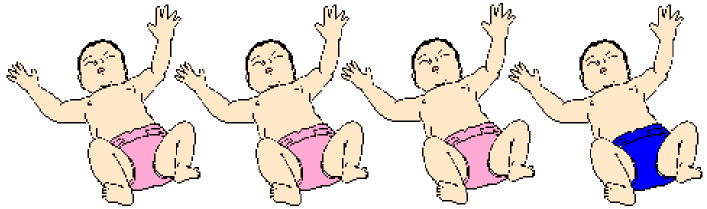
Article 3 : faire autant d'enfants que possible en respectant les articles 1 et 2.

On suppose que la probabilité qu'un enfant soit une fille est de $\frac{1}{2}$.

***Affirmation 3:***

« Si cette politique est appliquée, il y aura en moyenne plus de garçons que de filles dans ce pays. »

# Affirmation 3



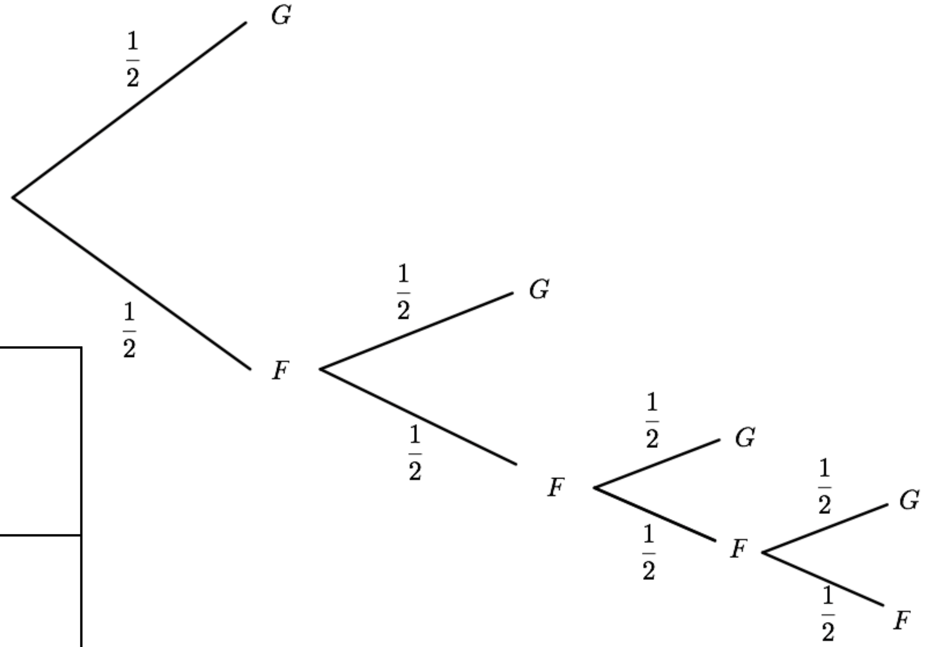
Article 1 : s'arrêter à la naissance du premier garçon ;
Article 2 : se limiter à  quatre enfants par famille;
Article 3 : faire autant d'enfants que possible en respectant les articles 1 et 2.

# Affirmation 3

Soit $X$ la variable aléatoire qui, à une famille ,

associe le nombre de filles .

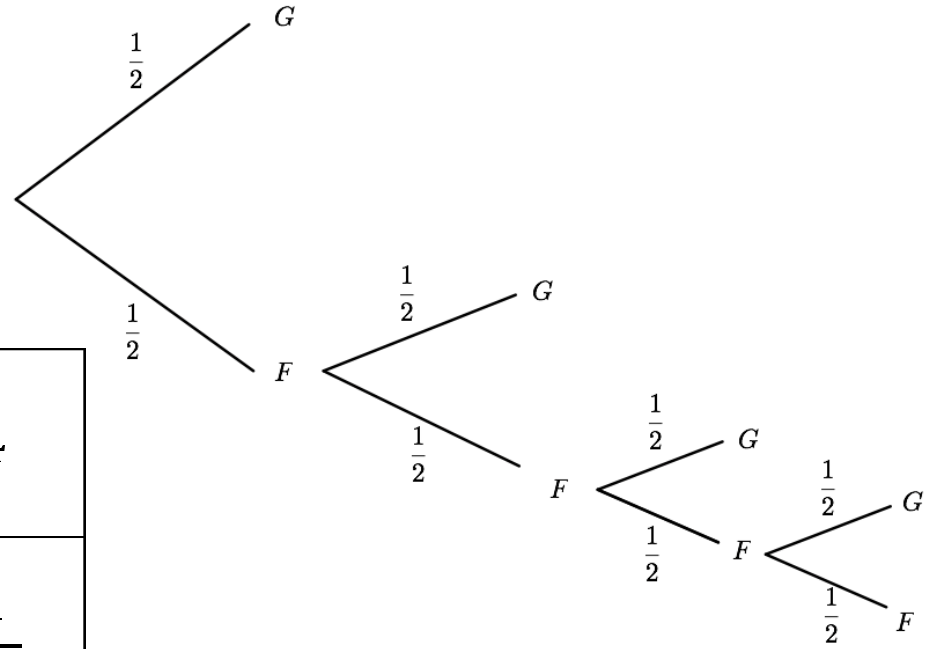
| Valeurs $\boldsymbol{x_i}$ prises par $\boldsymbol{X}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilités $\boldsymbol{P(X = x_i)}$ | | | | | |



# Affirmation 3

Soit $X$ la variable aléatoire qui, à une famille ,

associe le nombre de filles .



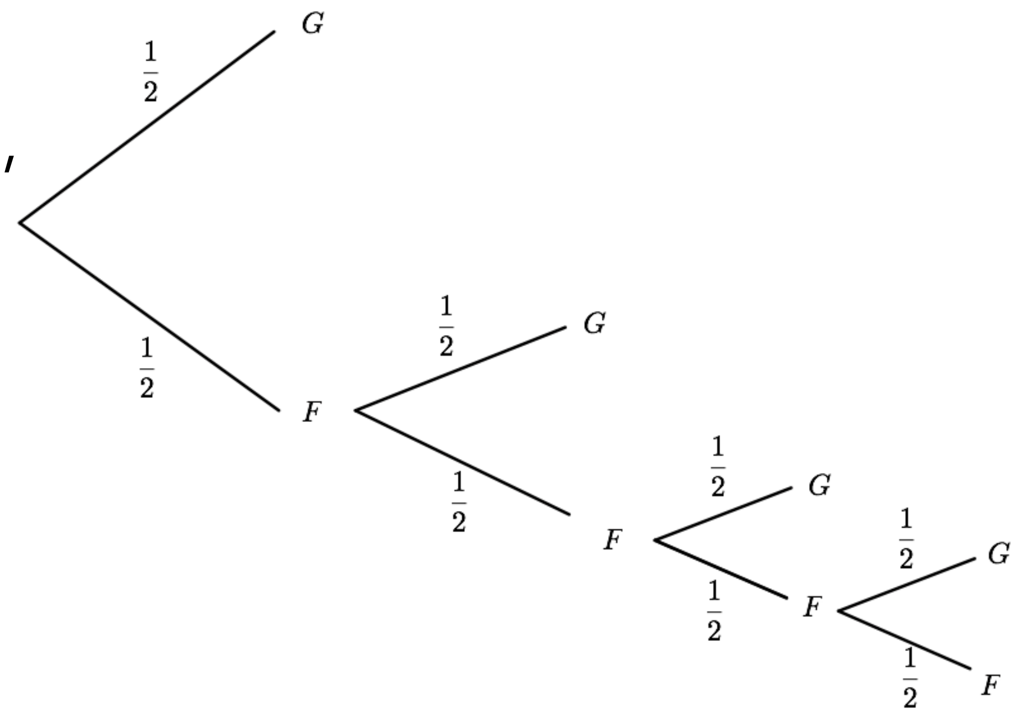

| Valeurs $\boldsymbol{x_i}$ prises par $\boldsymbol{X}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilités $\boldsymbol{P(X = x_i)}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

$$E(X) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{8} \times 2 + \frac{1}{16} \times 3 + \frac{1}{16} \times 4 = \frac{15}{16}$$

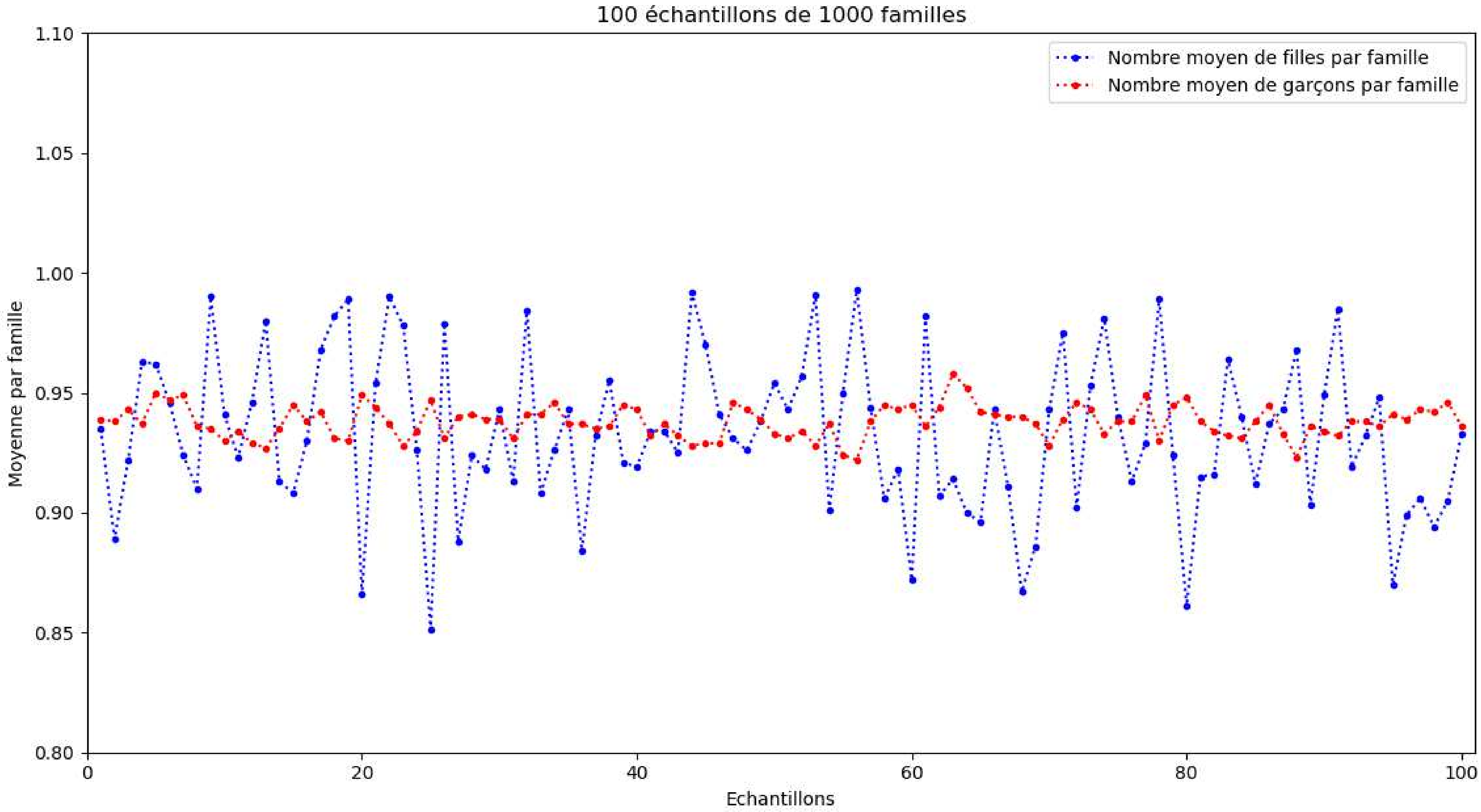
# Affirmation 3

Soit $Y$ la variable aléatoire qui, à une famille ,

associe le nombre de garçons .




| Valeurs $\boldsymbol{y_i}$ prises par $\boldsymbol{Y}$ | | |
|---|---|---|
| Probabilités $\boldsymbol{P(Y = y_i)}$ | | |


100 échantillons de 1000 familles
Nombre moyen de filles par famille
Nombre moyen de garçons par famille
Moyenne par famille
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0
20
40
60
80
100
Echantillons