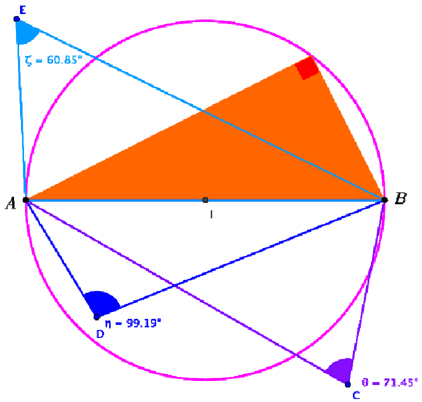
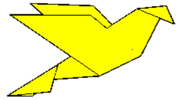
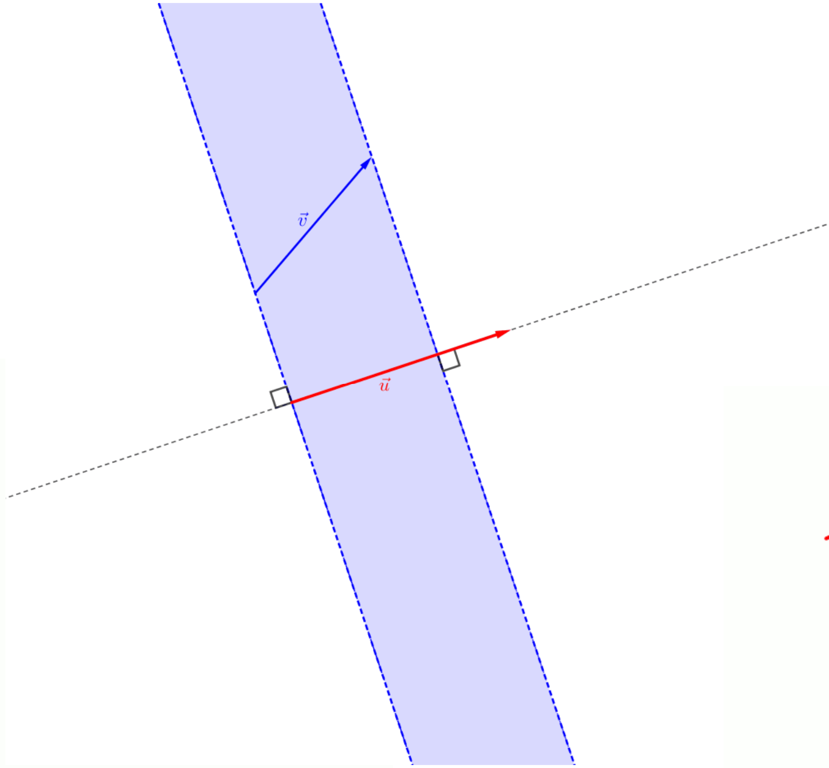
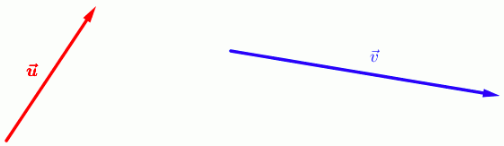
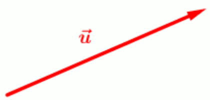
PRODUIT SCALAIRE

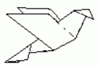


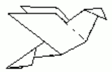






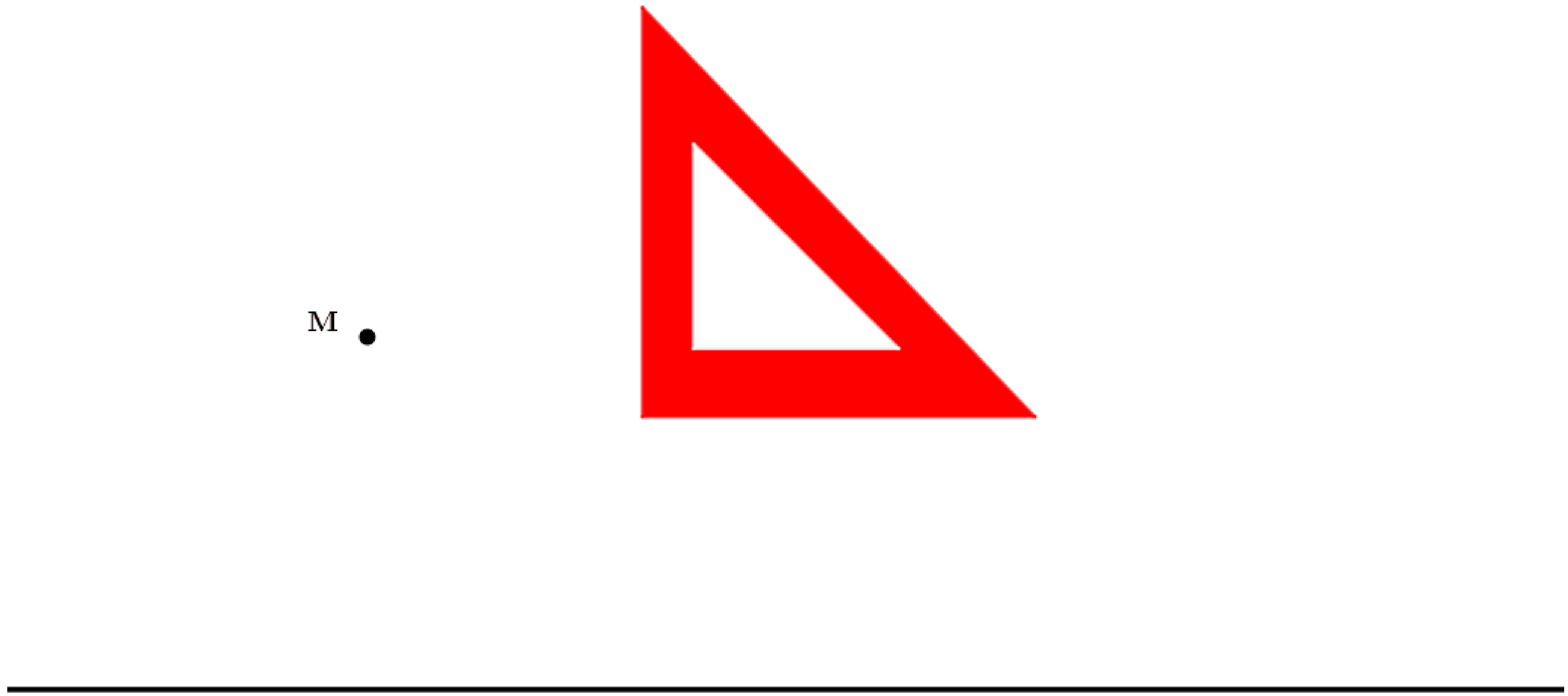




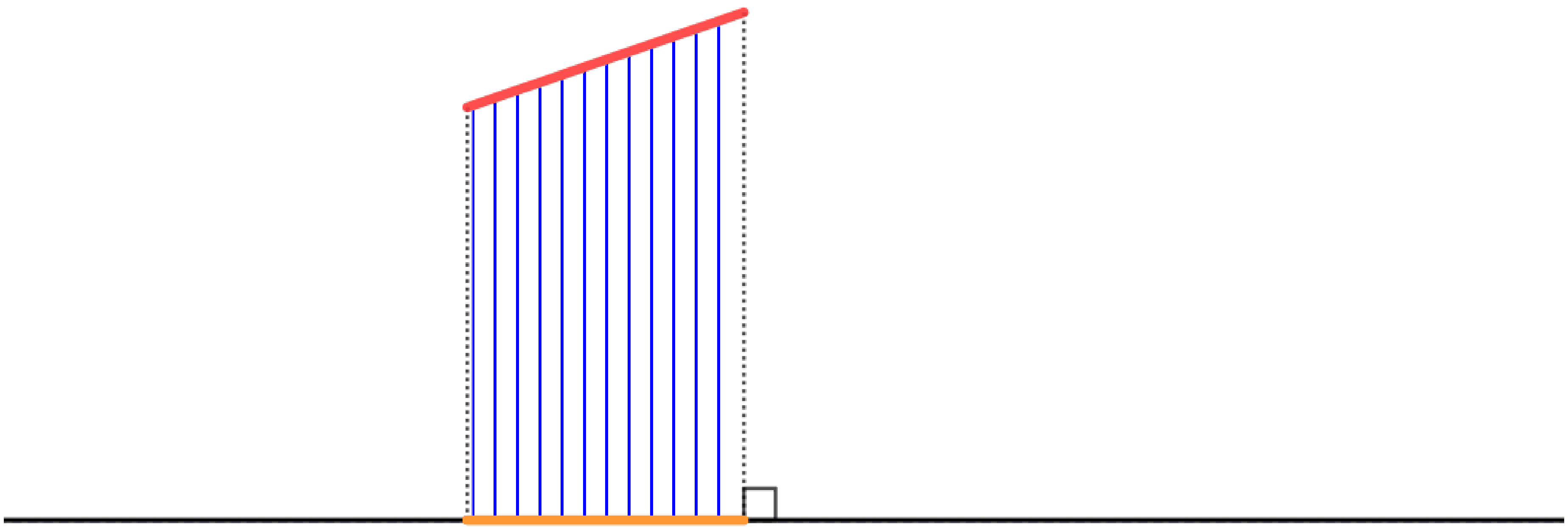


Projection orthogonale sur une droite

Projection orthogonale d’un point sur une droite

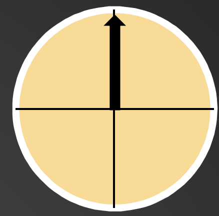


Projection orthogonale d'un segment sur une droite



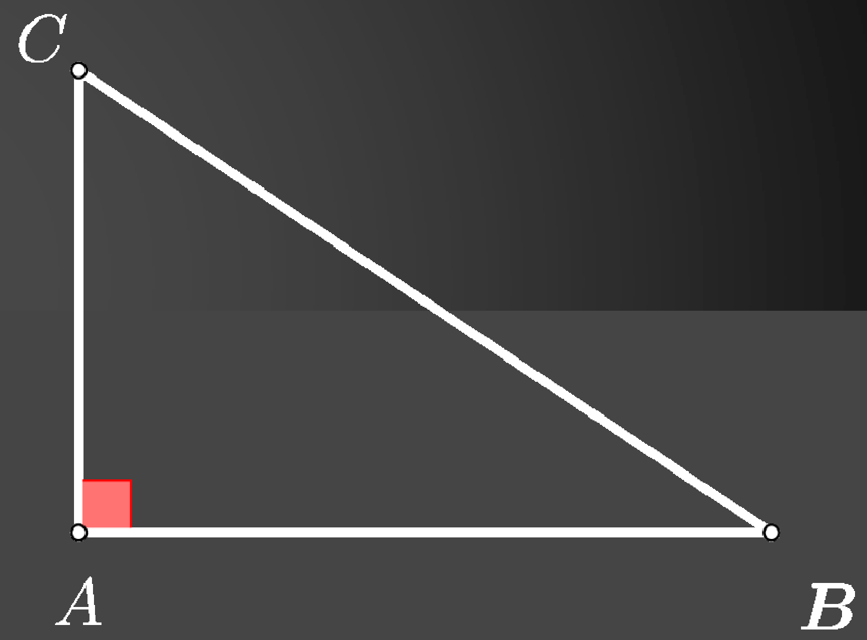
QUESTIONS FLASH

QUESTION 1

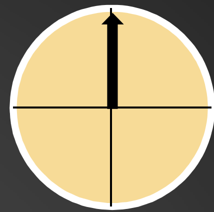


$AB = 10$ et $AC = 6$.

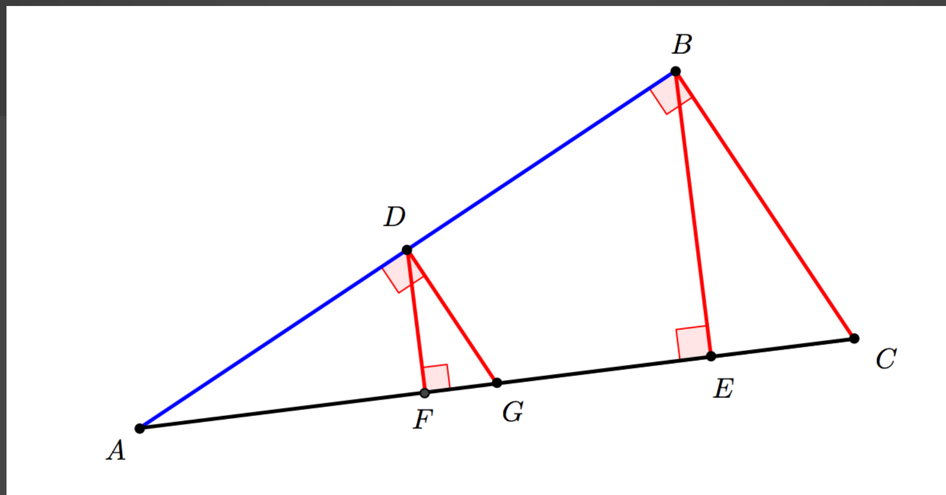
Calculer BC.



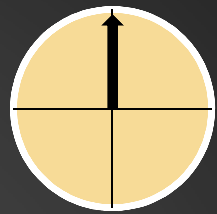
QUESTION 2



- Quel est le projeté orthogonal du point D sur la droite (AC) ?
- Quel est le projeté orthogonal du segment $[AB]$ sur la droite (AC) ?



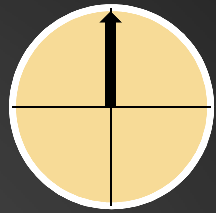
QUESTION 3



Compléter :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \ldots$
- $\overrightarrow{JK} + \ldots = \overrightarrow{JE}$
- $\overrightarrow{D\ \ldots} + \overrightarrow{B\ \ldots} = \overrightarrow{DC}$

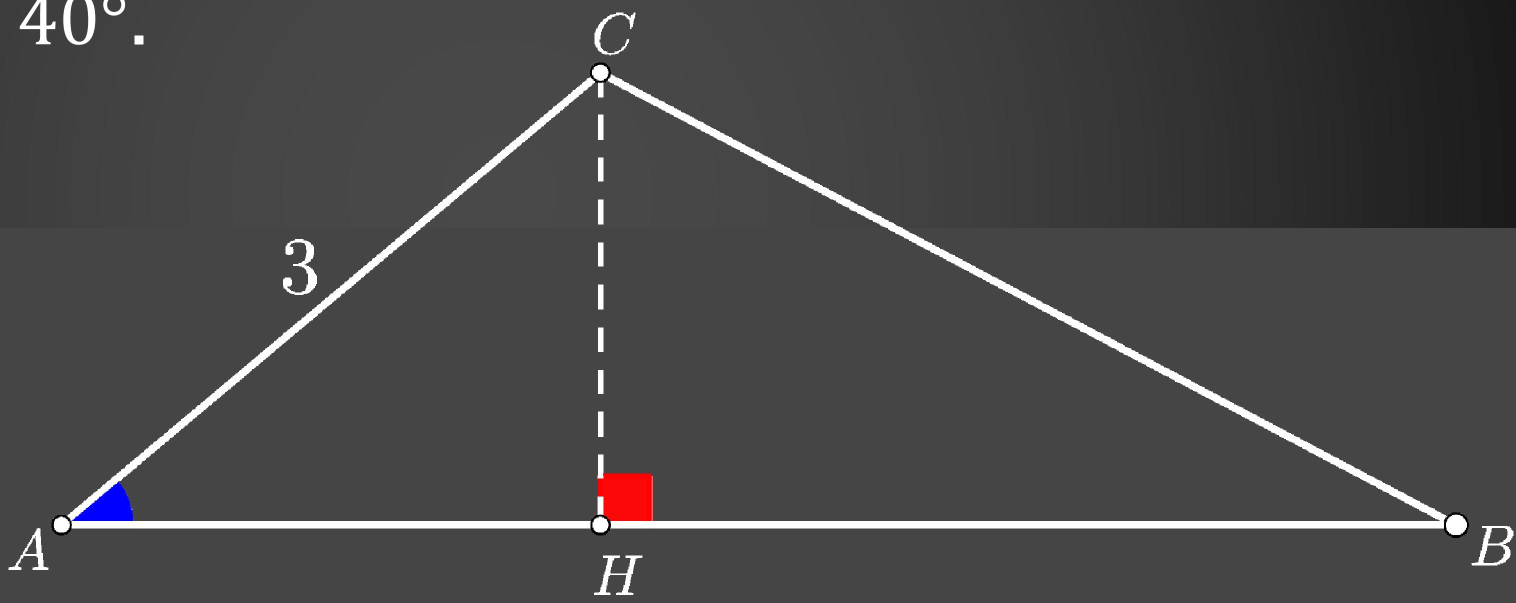
QUESTION 4



H est le projeté orthogonal du point C sur (AB).

$AC = 3$ et $\hat{A} = 40°$.

Calculer AH.

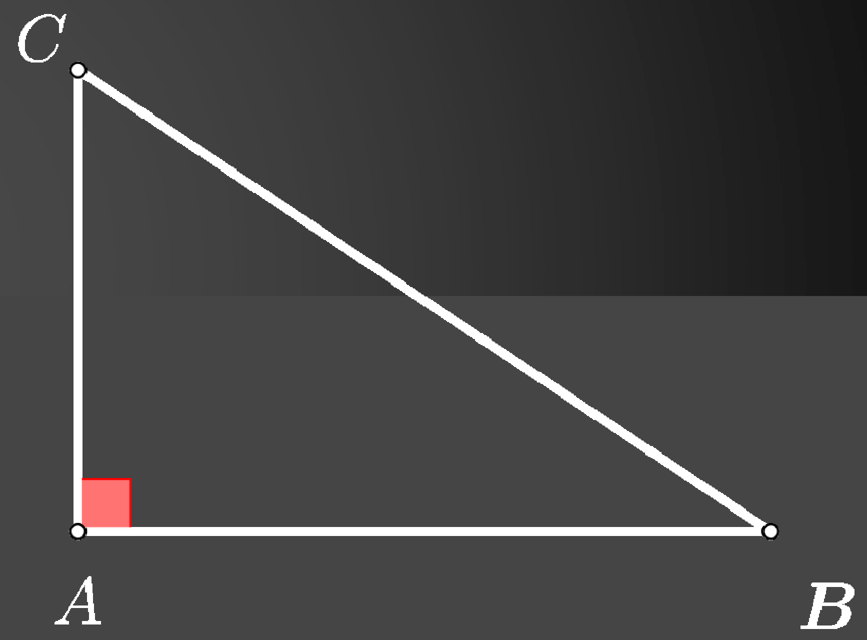


CORRECTION

QUESTION 1

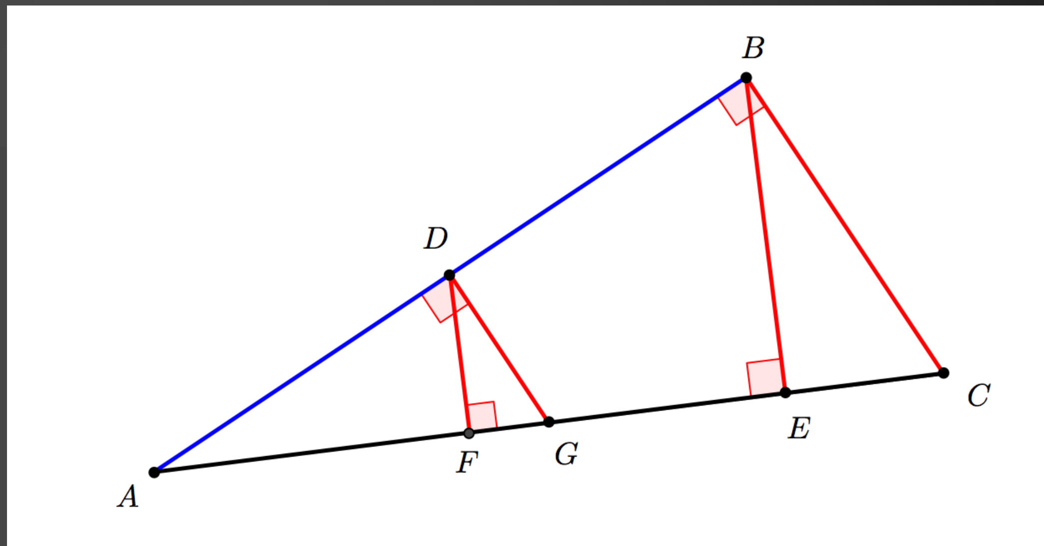
$AB = 10$ et $AC = 6$.

Calculer BC.



QUESTION 2

- Quel est le projeté orthogonal du point D sur la droite (AC) ?
- Quel est le projeté orthogonal du segment $[AB]$ sur la droite (AC) ?



QUESTION 3

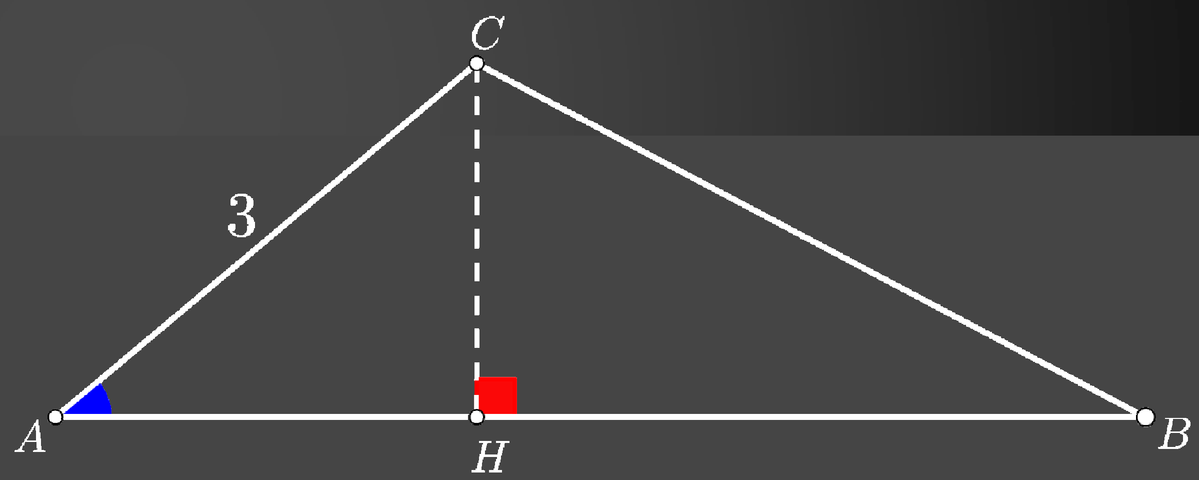
Compléter :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \ldots$
- $\overrightarrow{JK} + \ldots = \overrightarrow{JE}$
- $\overrightarrow{D\ \ldots} + \overrightarrow{B\ \ldots} = \overrightarrow{DC}$

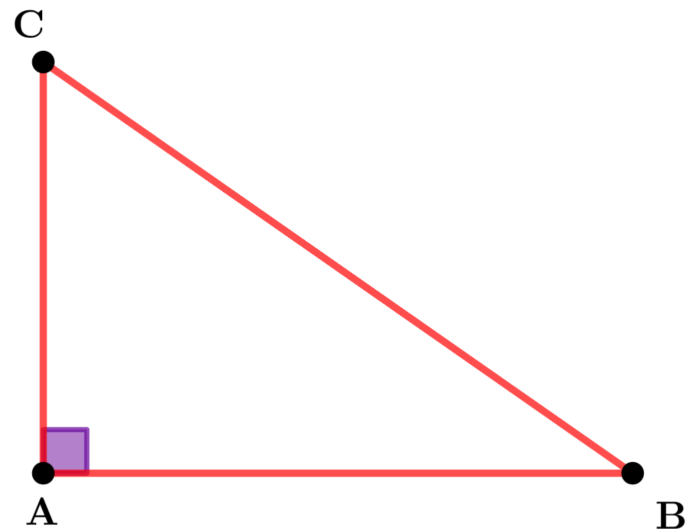
QUESTION 4

H est le projeté orthogonal du point C sur (AB).

$AC = 3$ et $\hat{A} = 40°$. Calculer AH.



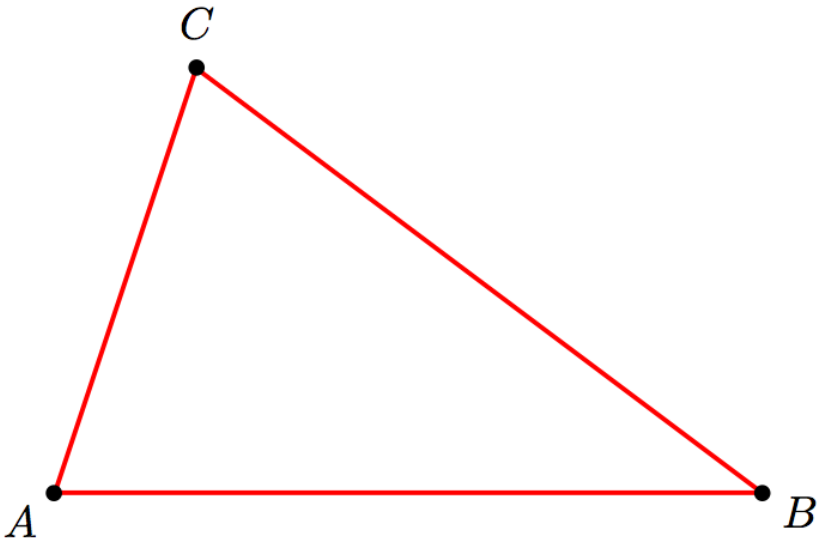
Théorème de Pythagore dans un triangle rectangle



$$\begin{aligned} ABC \text{ est rectangle en } A &\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \\ &\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0 \end{aligned}$$

Généralisation du théorème de Pythagore

$$d = AB^2 + AC^2 - BC^2 \ ?$$

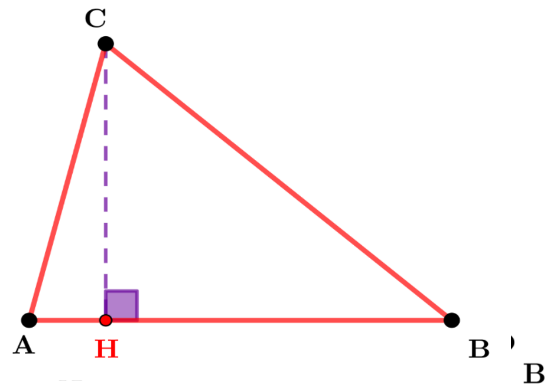


Projection dans un triangle

ABC est un triangle.

H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Si l'angle $\hat{A}$ est droit, $A = H$.



Projection dans un triangle

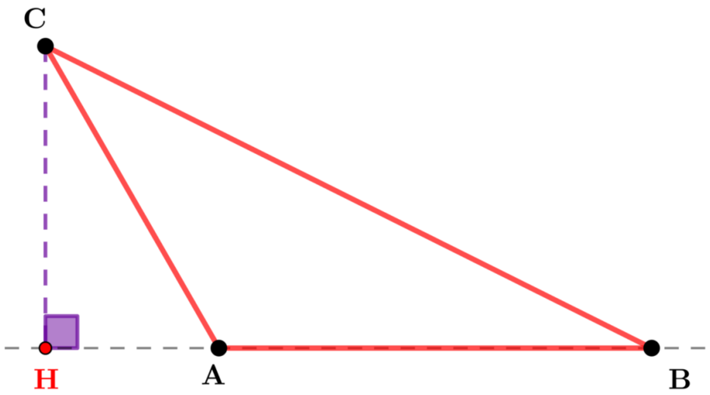
ABC est un triangle.

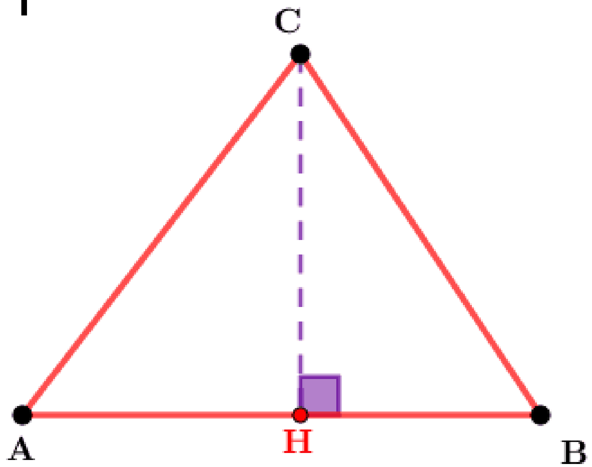
H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Si l'angle $\hat{A}$ est droit, $A = H$

Si l'angle $\hat{A}$ est aigu, H appartient à la demi-droite $[AB)$.

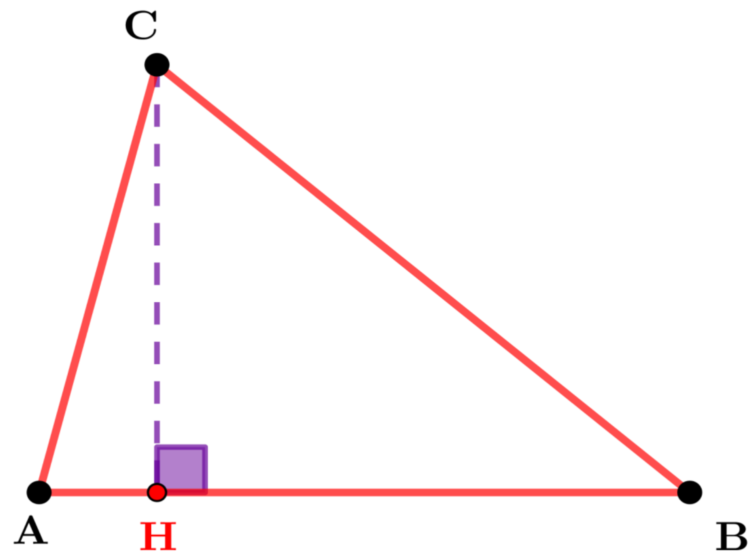
Si l'angle $\hat{A}$ est obtus, H n'appartient pas à la demi-droite $[AB)$.





Généralisation du théorème de Pythagore

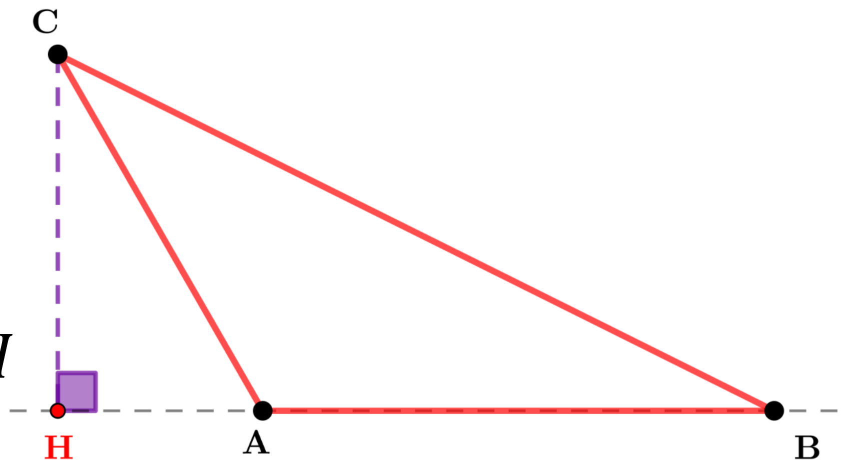
Cas où l'angle $\hat{A}$ est aigu:



$$\boxed{AC^2 + AB^2 = BC^2 + 2AH \times AB}$$

Généralisation du théorème de Pythagore

Cas où l'angle $\hat{A}$ est obtus :

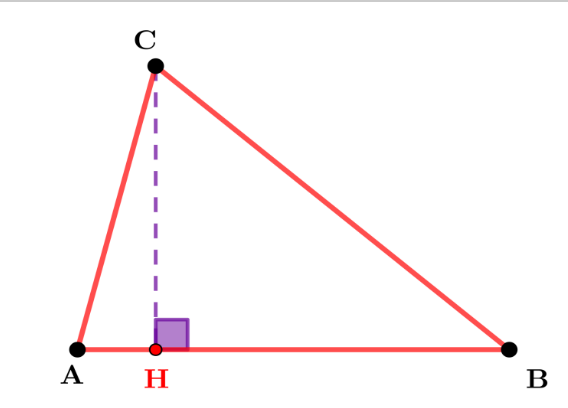
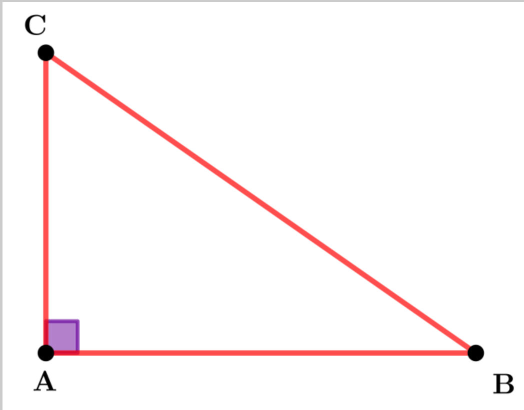
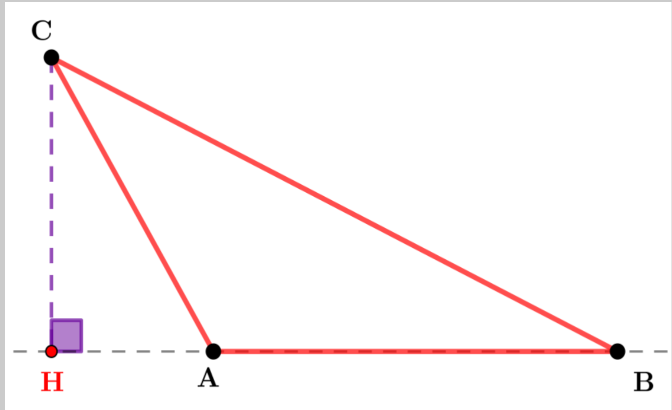


$$BC^2 = BH^2 + HC^2$$
$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$
$$AB^2 = (BH - AH)^2 = BH^2 + AH^2 - 2AH \times BH$$

$$\begin{aligned} AC^2 + AB^2 &= AH^2 + HC^2 + BH^2 + AH^2 - 2AH \times BH \\ &= BC^2 - 2AH \times (BH - AH) \\ &= BC^2 - 2AH \times AB \end{aligned}$$

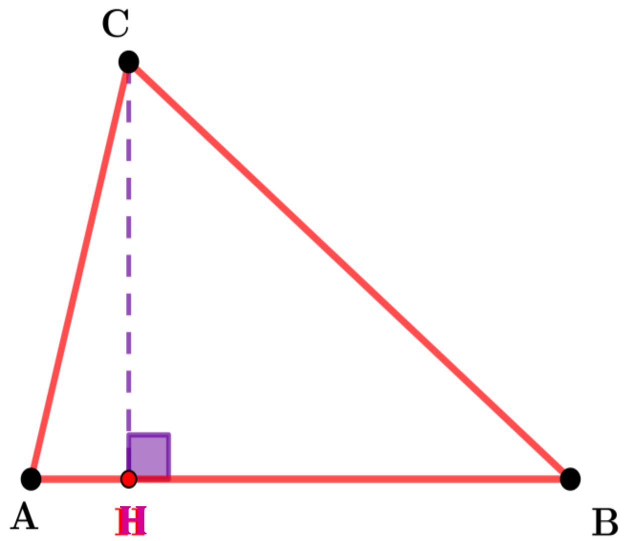
$$\boxed{\boldsymbol{AC^2 + AB^2 = BC^2 - 2AH \times AB}}$$

Généralisation du théorème de Pythagore

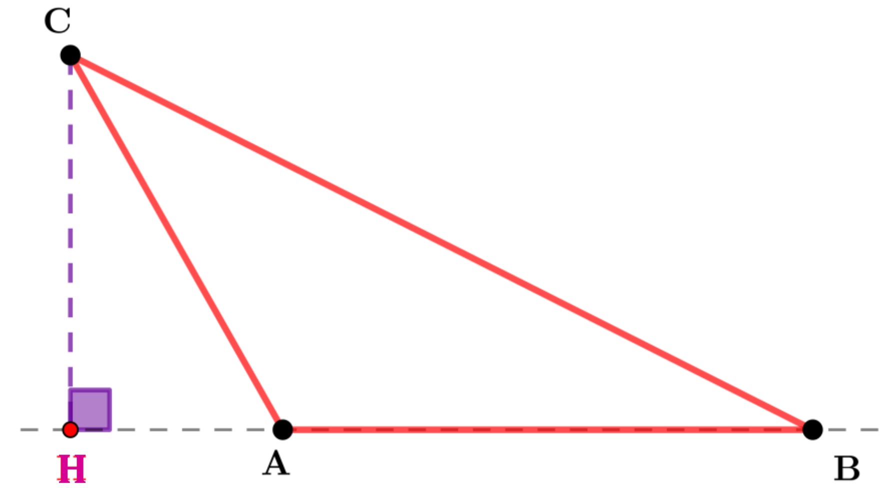
		
$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2AB \times AH$	$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0$	$AB^2 + AC^2 - BC^2 = -2AB \times AH$

Généralisation du théorème de Pythagore

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \pm AB \times AH$$



$+AB \times AH$



$-AB \times AH$

Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH$$

si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ de même sens.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -AB \times AH$$

si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ de sens contraire.

Produit scalaire de deux vecteurs quelconques

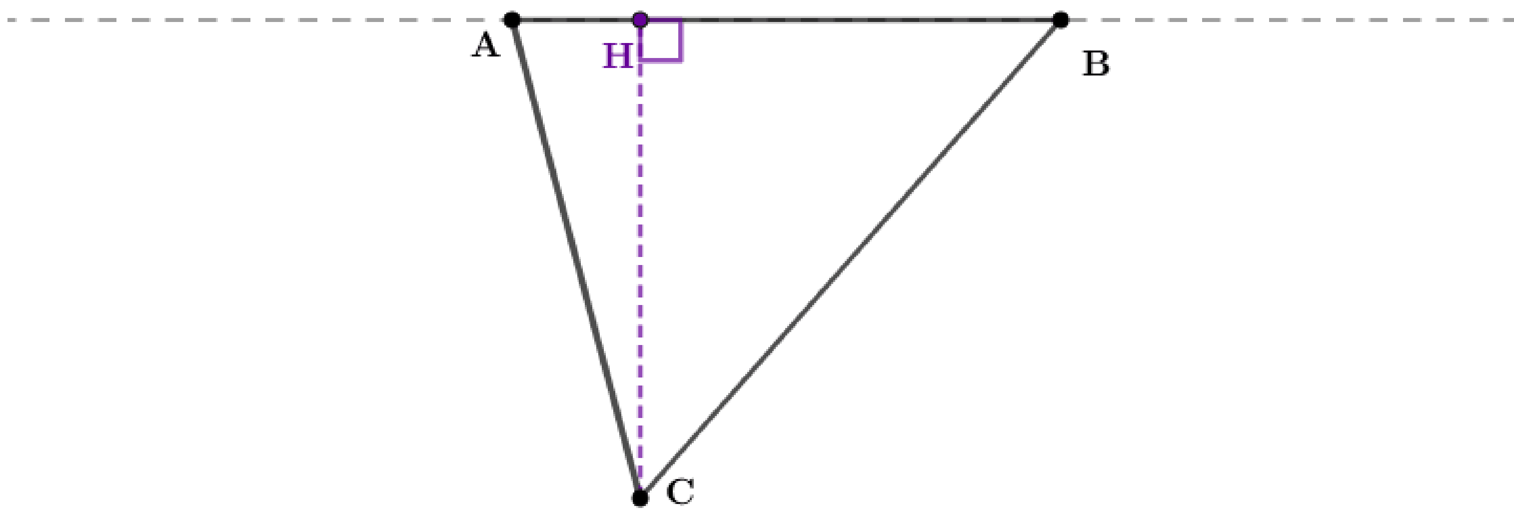
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$?

Produit scalaire de deux vecteurs quelconques

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

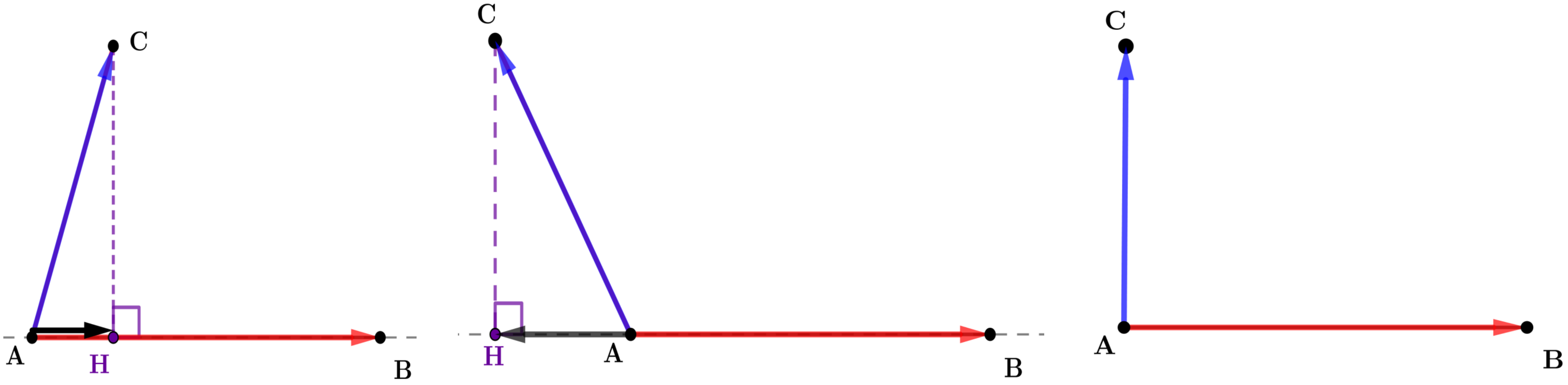
Produit scalaire de deux vecteurs quelconques

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$



Produit scalaire de deux vecteurs quelconques

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).



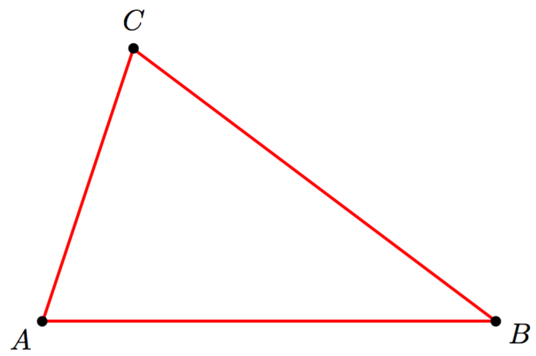
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Autres expressions du produit scalaire

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)}$$



formule de polarisation

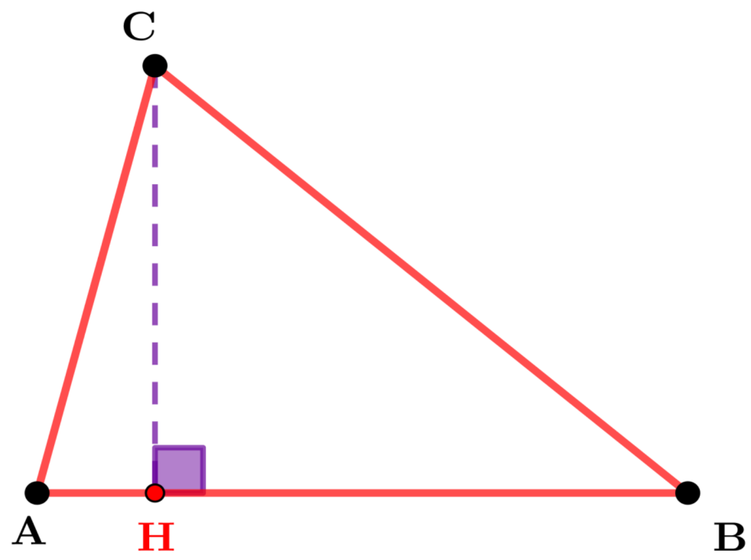
Autres expressions du produit scalaire

A, B et C sont trois points distincts

Si l'angle $\hat{A}$ est aigu, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$

$\cos(\hat{A}) = \frac{AH}{AC}$ donc $AH = AC \times \cos(\hat{A})$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\hat{A})}$$



Théorème d'Al-Kashi: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\hat{A})$

Autres expressions du produit scalaire
Configurations particulières

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$

➢ Si $C = B$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2$

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$

➢ Si $A = C$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\vec{0} = 0$

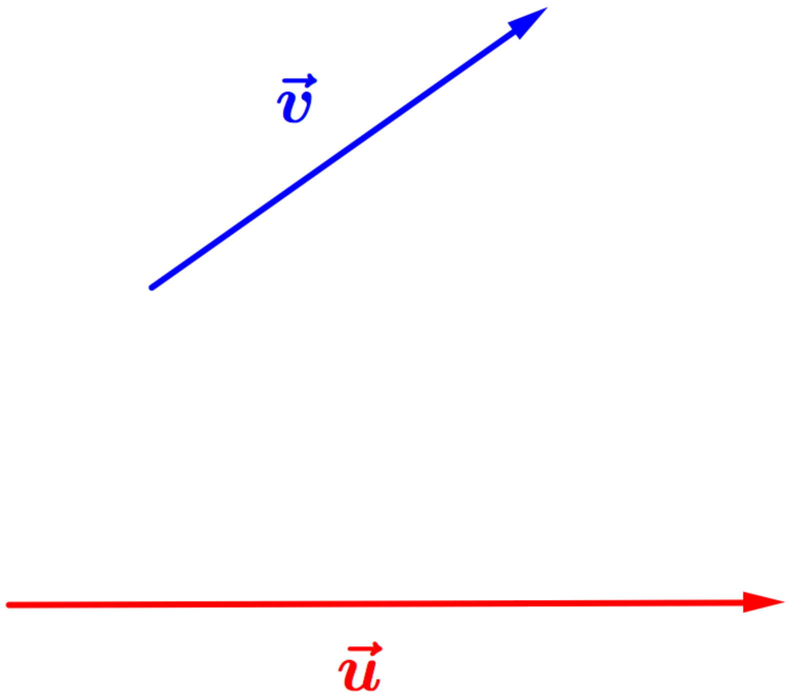
- Si A, B et C sont trois points distincts:

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

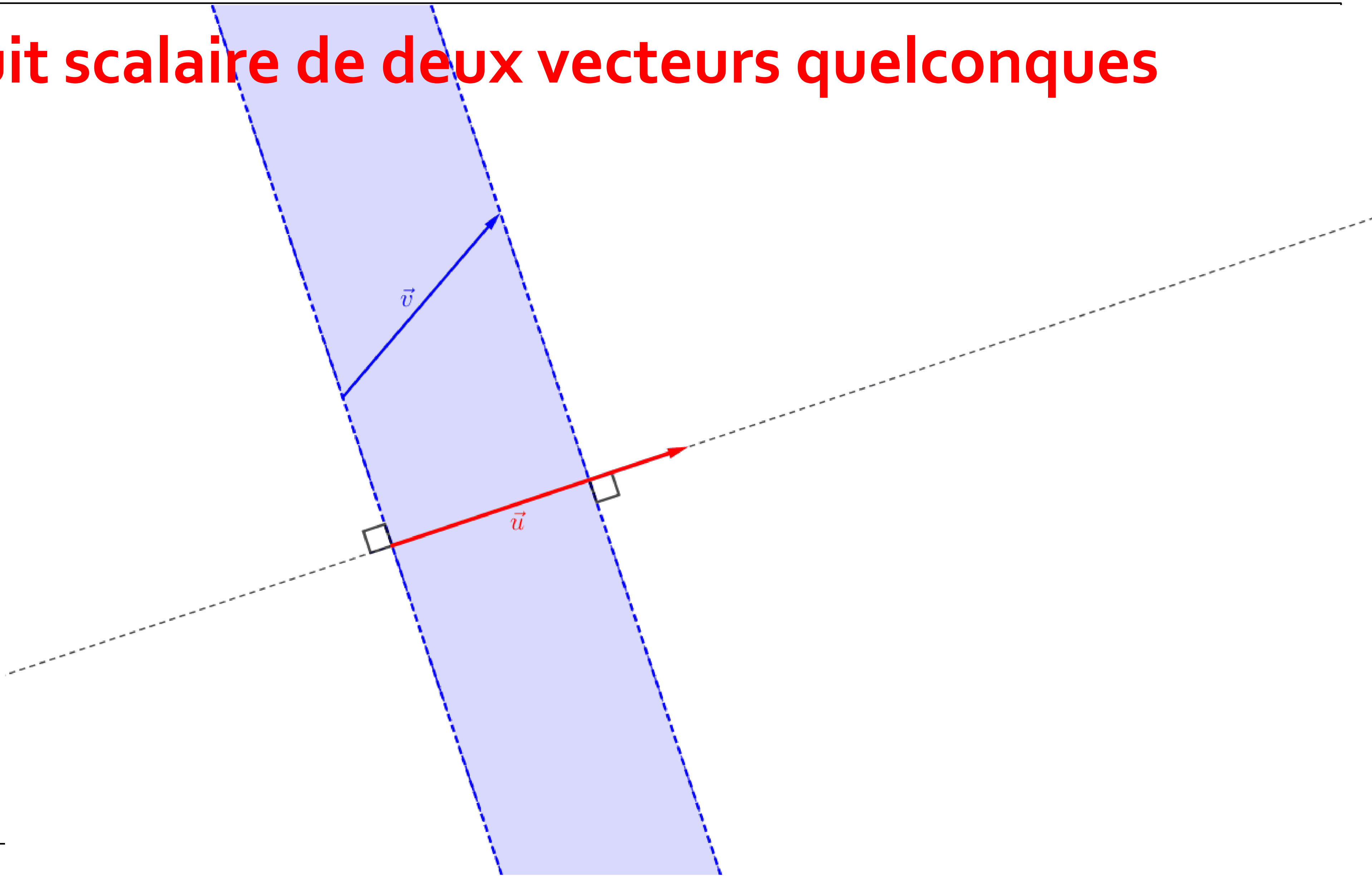
Produit scalaire de deux vecteurs quelconques

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$$



Produit scalaire de deux vecteurs quelconques



Propriétés du produit scalaire:

Propriétés du produit scalaire: symétrie

$\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$

$\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\vec{v}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

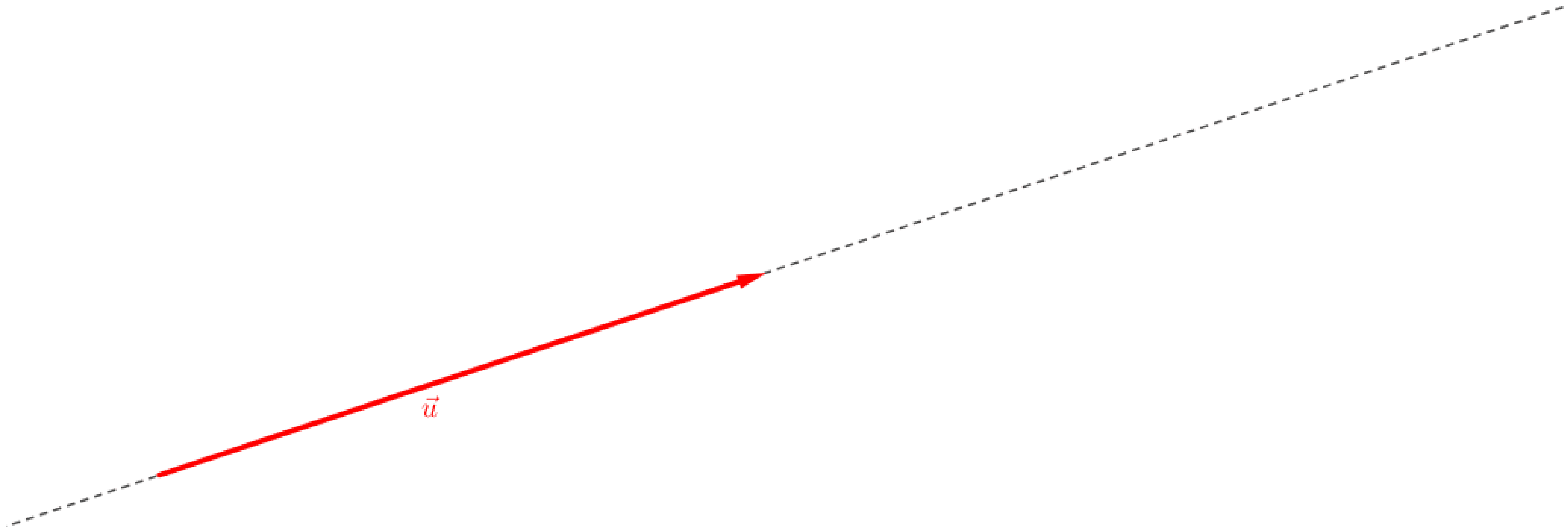
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - CB^2)$$

$$\boxed{\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}}$$

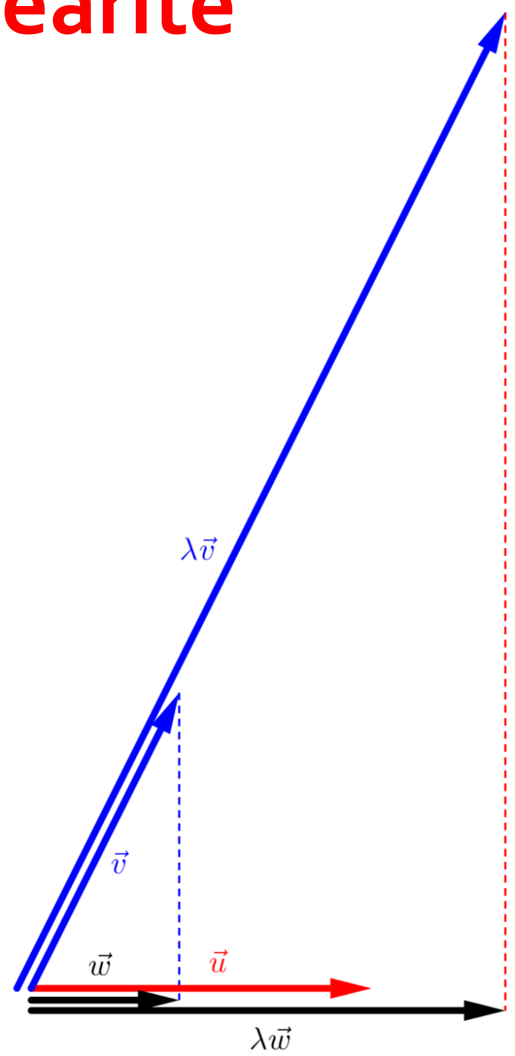
Propriétés du produit scalaire: bilinéarité

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$



Propriétés du produit scalaire: bilinéarité

$(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k \times (\vec{u}.\vec{v})$ avec k réel



Propriétés du produit scalaire:

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

- $\vec{u}.\vec{v}$ est un nombre réel
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $(\vec{v} + \vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$
- $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k \times (\vec{u}.\vec{v})$ avec k réel

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- ~~Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$~~

Applications du produit scalaire

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \pm AB \times AH$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

➡ Calculer une longueur

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$

➡ Calculer un angle

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (AB)\perp(CD)$$

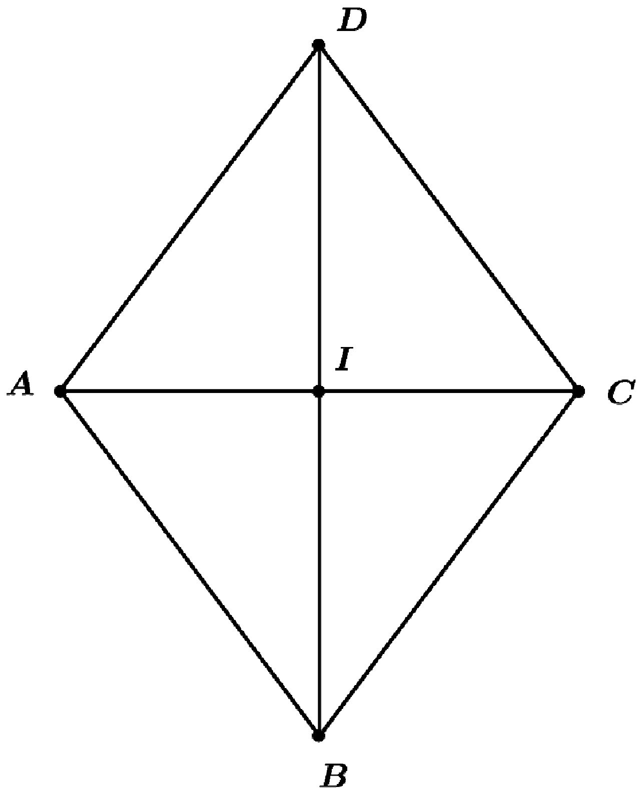
➡ Vérifier une orthogonalité

LES QUESTIONS

Question 1

$ABCD$ est un losange de centre I.

$AC = 6$ et $BD = 8$



Question 1:

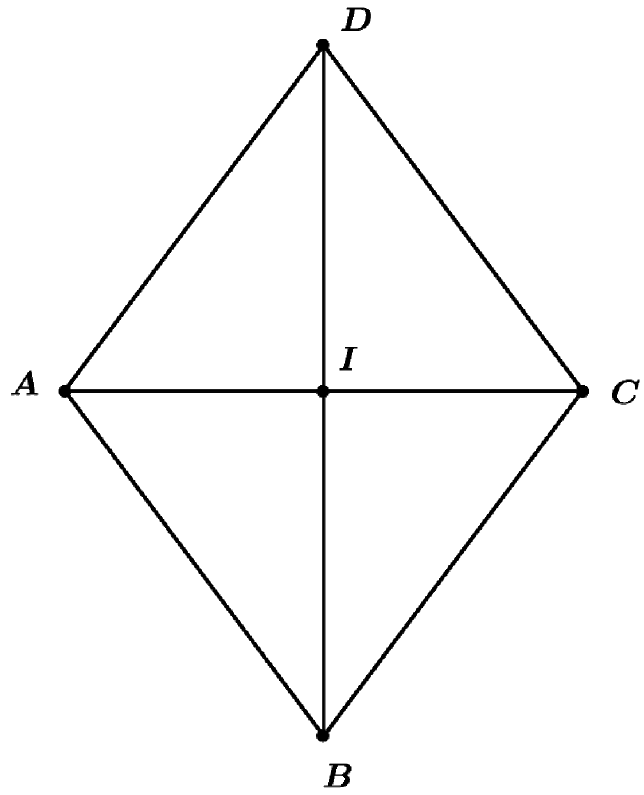
Calculer les produits scalaires:

- $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

Question 1

$ABCD$ est un losange de centre I.
$AC = 6$ et $BD = 8$

- $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} =$
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$=
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ =

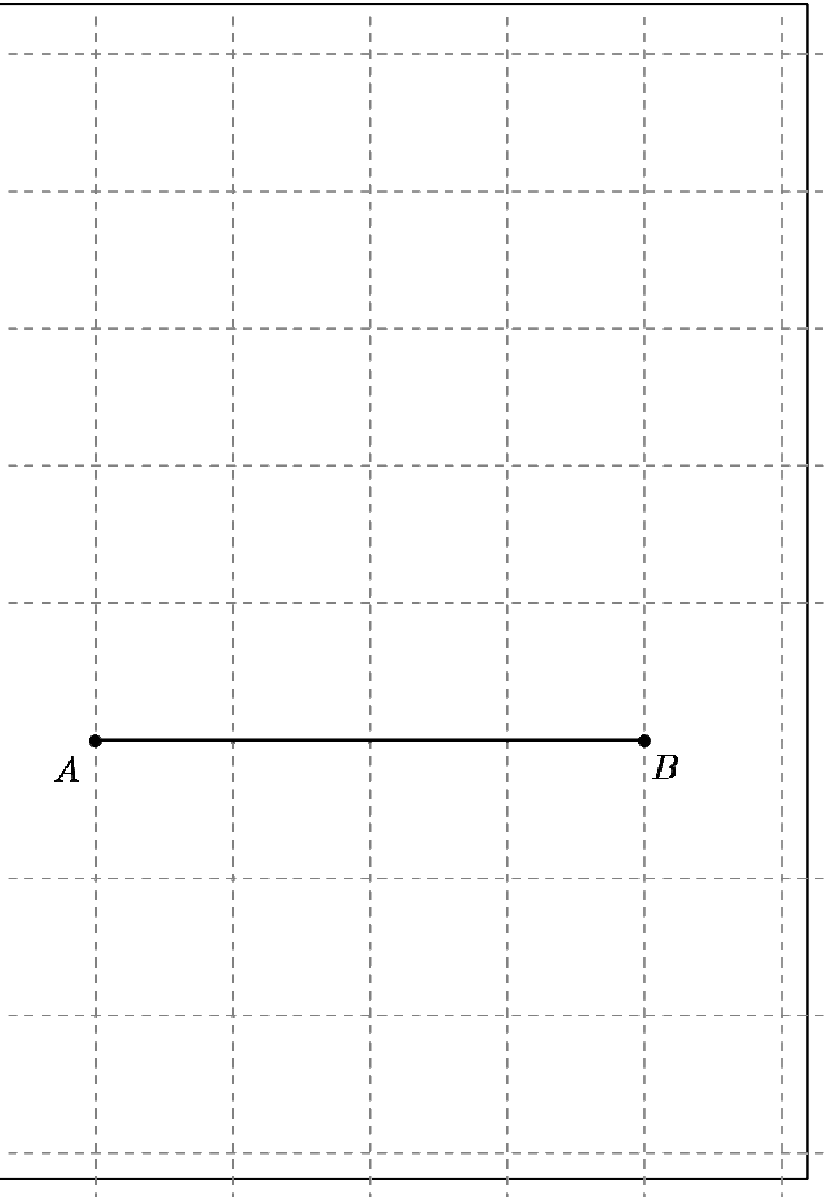


Question 2

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 4$.

Question 3:

Placer 4 points M tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 12$.

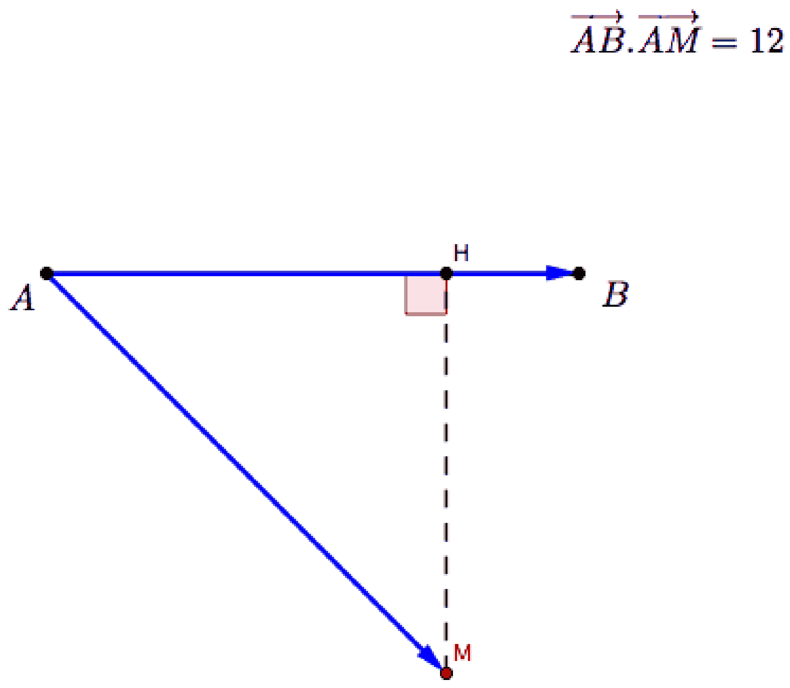


Question 2

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 4$.

Question 3:

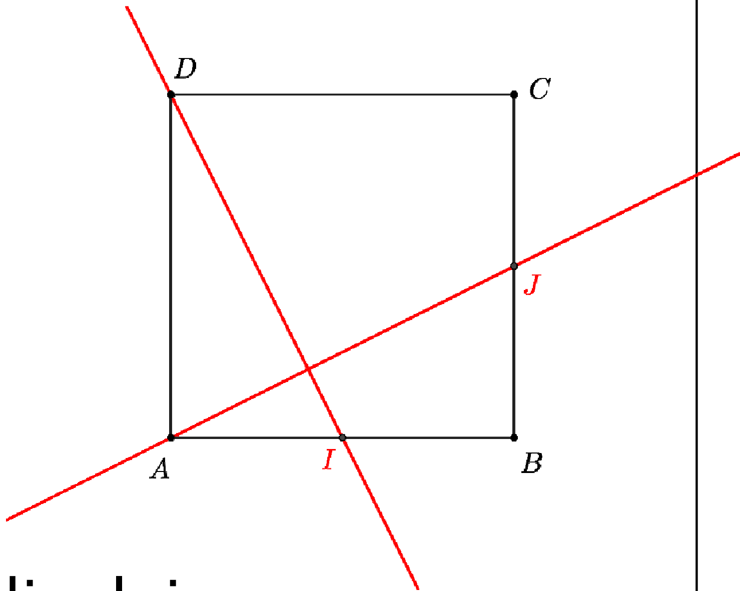
Placer quatre points M tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 12$.



Question 3 (vrai/faux)

$ABCD$ est un carré de côté 2.

I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.



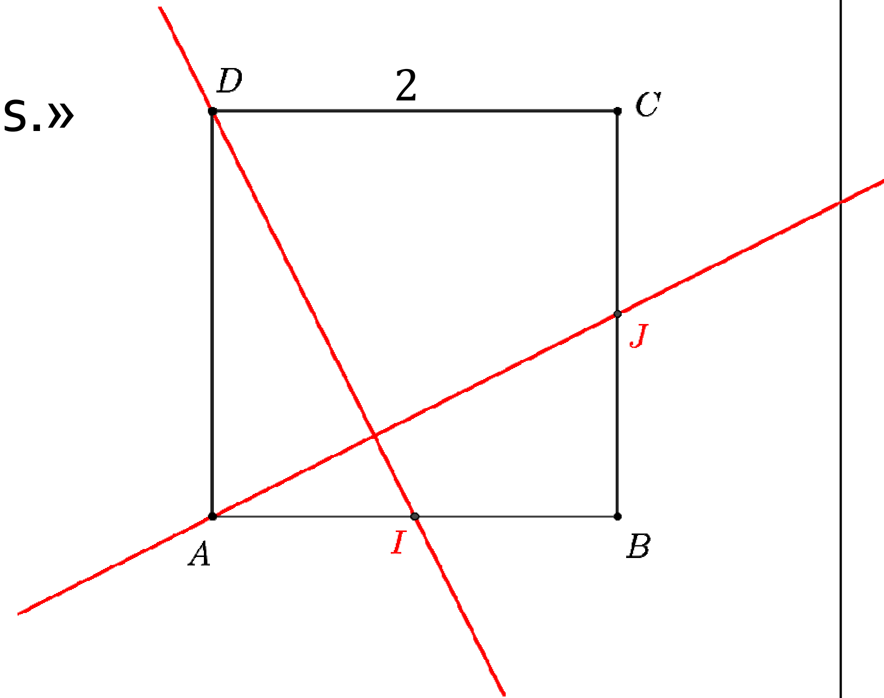
Affirmation :

« Les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.»

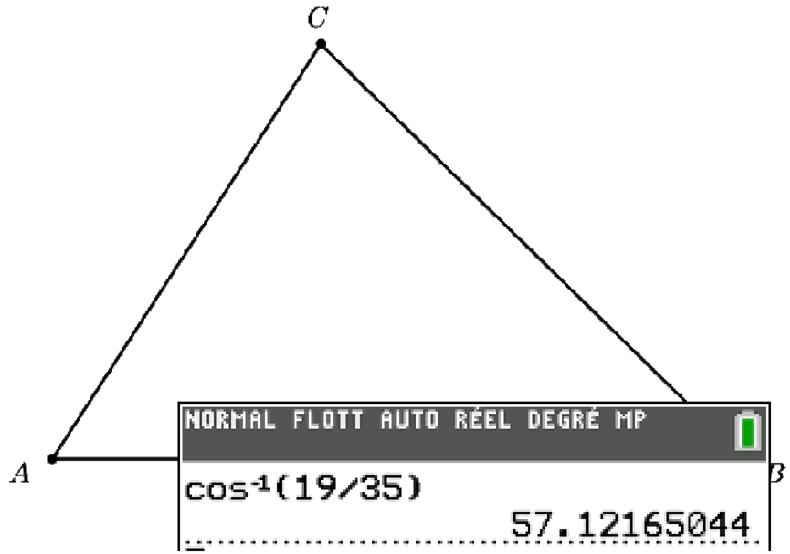
Question 3 (vrai/faux)

Affirmation :

« Les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.»



Question 4



ABC est un triangle.

$AB = 7$ et $AC = 5$ et $BC = 6$.

Question 4:

Calculer la mesure de l'angle $\hat{A}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$

Question 5

Question 5 :

A, B, M sont trois points du plan. I est le milieu de $[AB]$.

Démontrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2$.

Question 5

Question 5 :

On a démontré que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2$.

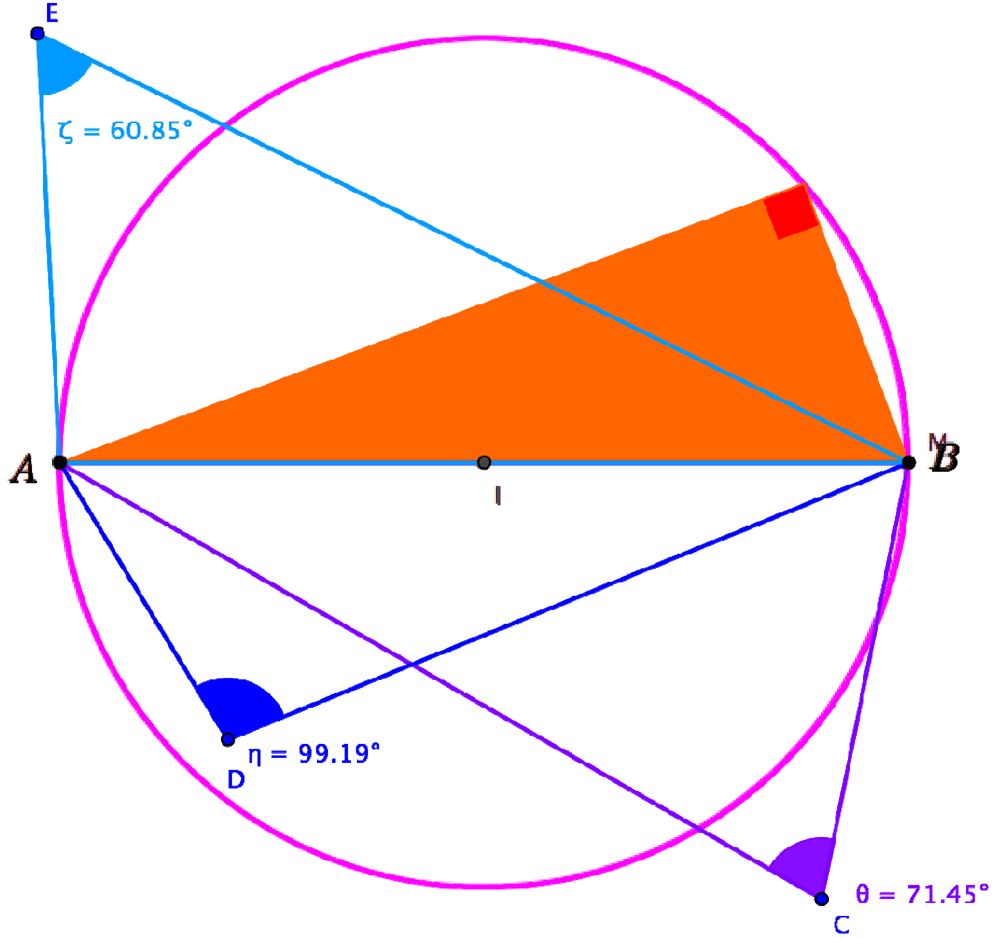
Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$?

Question 5

Question 5 :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\,?$$

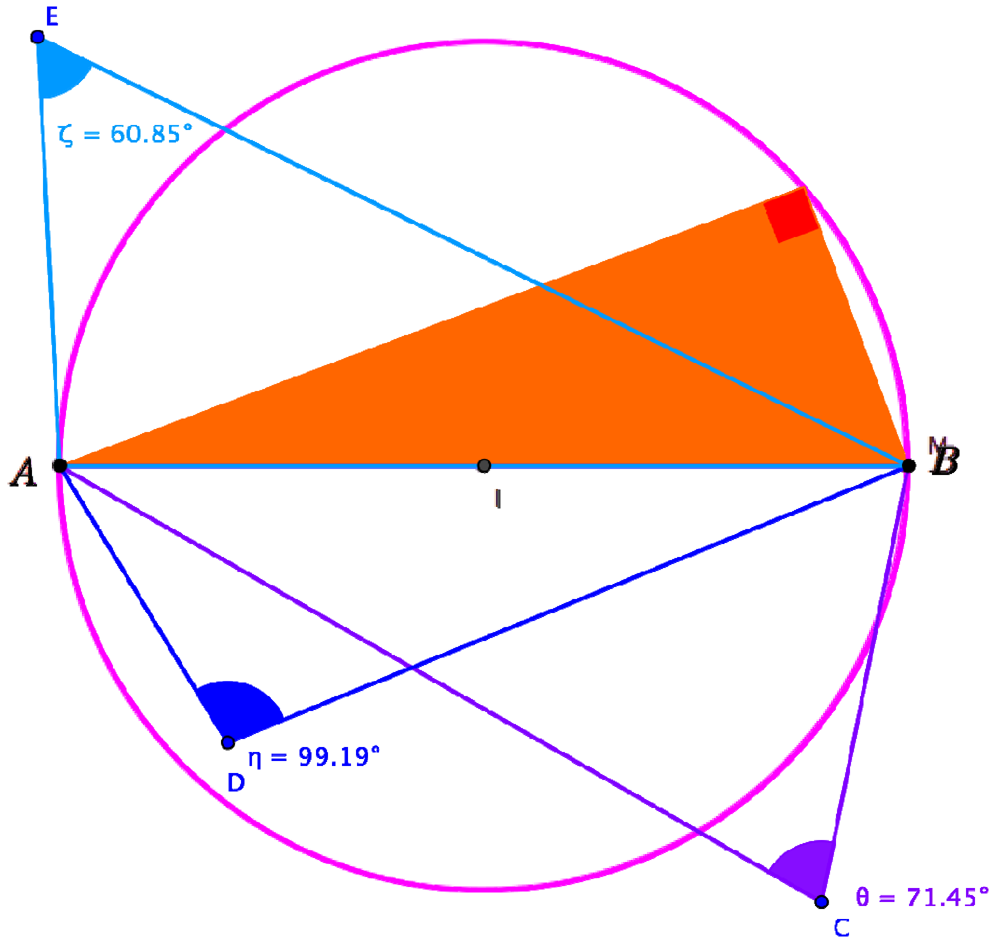


Question 5

Question 5 :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

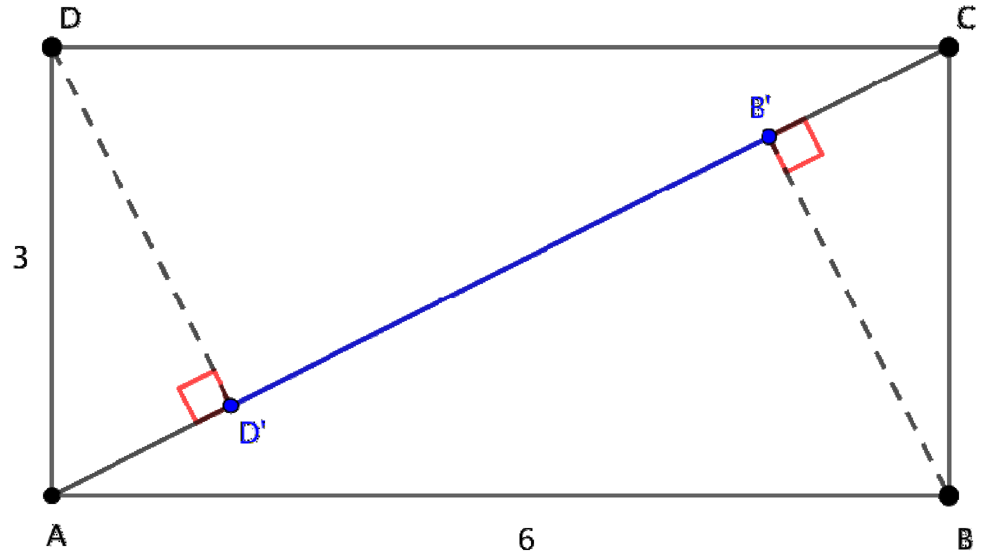
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\,?$$



Question 5

$ABCD$ est un rectangle. $AB = 6$ et $AD = 3$.

B' et D' sont les projetés orthogonaux de B et D sur (AC).

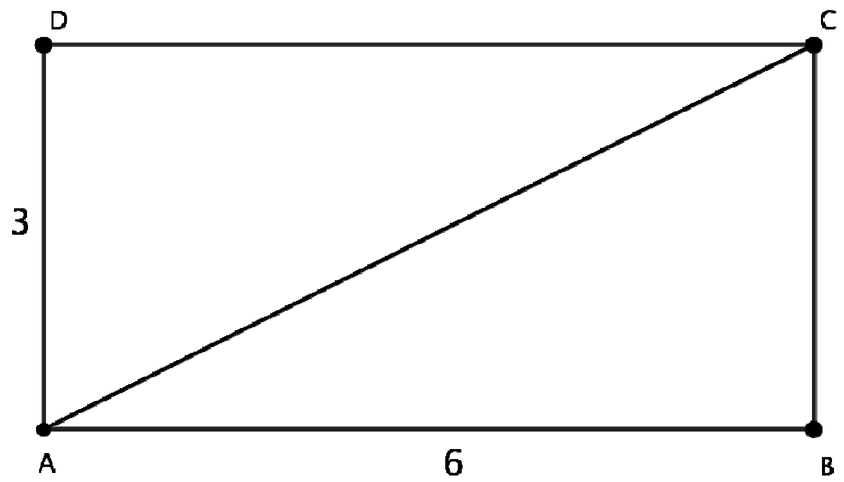


Question 5:

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ et en déduire la longueur $B'D'$.

Question 5

$ABCD$ est un rectangle. $AB = 6$ et $AD = 3$.



Question 5:

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

Question 5

$ABCD$ est un rectangle. $AB = 6$ et $AD = 3$.
B'et D' sont les projetés orthogonaux de B et D sur (AC).

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -27$$

en déduire la longueur $B'D'$.