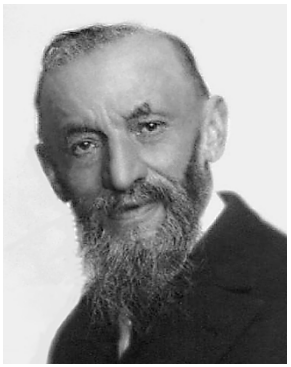
Récurrence
Raisonnement et étude de suites

	A
1	0,1
2	=A1*(2-A1)
3	
4	
5	
6	

	A
1	0,1
2	0,19
3	
4	
5	
6	

	A
1	0,1
2	0,19
3	0,3439
4	0,56953279
5	0,81469798
6	0,96566316
7	0,99882098
8	0,99999861

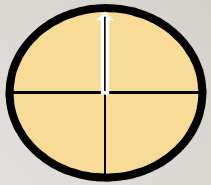
Blaise PASCAL
1623 - 1662



Giuseppe PEANO
1858 - 1932

QUESTIONS FLASH

QUESTION 1

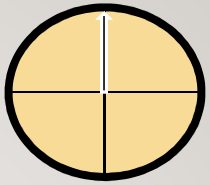


Voici trois suites :

- Pour tout entier naturel $n, u_n = n^2 - n$
- $v_0 = 5 \qquad v_{n+1} = 3v_n - 2$
- $w_0 = 7 \qquad w_{n+1} = w_n + 3$

Préciser pour quelle(s) suite(s) il est très facile de calculer le terme pour $n = 100$

QUESTION 2



Voici deux fonctions écrites en Python qui permettent de calculer le terme de rang n d'une suite u et d'une suite v.

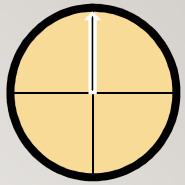
```python
def U(n) :
    u=10
    for i in range (1,n+1):
        u=2u-1
    return u
```

```python
def V(n) :
    v=0.25**n+1
    return v

```

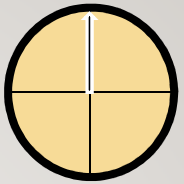
Donner l'expression de chacune de ces suites.

QUESTION 3



Montrer que pour tout entier naturel n,
l'expression $(5n + 1)^2 + 9$ est un multiple de 5.

QUESTION 4



Voici trois propositions qui dépendent d'un entier naturel n.

- $P_1(n)$: « $u_n < 3$ »
- $P_2(n)$: « $v_n = 3n - 1$ »
- $P_3(n)$: « $w_n = \frac{n}{n+1}$ »

Écrire chacune de ces propositions pour l'entier $n + 1$.

CORRECTION

QUESTION 1

Voici trois suites :

- Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 - n$
- $v_0 = 5$ $\quad v_{n+1} = 3v_n - 2$
- $w_0 = 7$ $\quad w_{n+1} = w_n + 3$

Préciser pour quelle(s) suite(s) il est très facile de calculer le terme pour $n = 100$

QUESTION 2

Voici deux fonctions écrites en python qui permettent de calculer le terme de rang n d'une suite u et d'une suite v.

```
1  def U(n) :
2      u=10
3      for i in range (1,n+1):
4          u=2u-1
5      return u
```

```
1  def V(n) :
2      v=0.25**n+1
3      return v
4
```

Donner l'expression de chacune de ces suites.

QUESTION 3

Montrer que pour tout entier naturel n, l'expression $(5n + 1)^2 + 9$ est un multiple de 5.

QUESTION 4

Voici trois propositions qui dépendent d'un entier naturel n.

- $P_1(n)$: « $u_n < 3$ »
- $P_2(n)$: « $v_n = 3n - 1$ »
- $P_3(n)$: « $w_n = \frac{n}{n+1}$ »

Écrire chacune de ces propositions pour l'entier $n + 1$.

Raisonnement par récurrence

On va s'intéresser aux propositions dépendant d'un entier naturel n.

Qu'appelle-t-on une proposition en mathématiques ?

Définition
Une proposition est une phrase qui peut être vraie ou fausse.

Raisonnement par récurrence

Examinons trois exemples de propositions dépendant d'un entier n.
L'objectif est d'étudier si ces propositions sont vraies pour tout entier naturel n.

$P(n)$: « $n^2 + n + 11$ **est un nombre premier**»

$Q(n)$: « $(5n + 1)^2 + 9$ **est un multiple de 5** »

$R(n)$: « $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ » avec $n \geq 1$

Raisonnement par récurrence

Raisonnement par récurrence

$P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n
Les deux étapes du raisonnement par récurrence :

Étape 1 : initialisation
On vérifie que la proposition que l'on souhaite démontrer est vraie pour l'entier n_0 : on vérifie $P(n_0)$

Étape 2 : hérédité
On montre que si la proposition est vraie pour un entier quelconque $k \geq n_0$ alors elle est vraie pour l'entier qui suit, c'est-à-dire l'entier $k+1$: on montre que

pour tout $k \geq n_0$, $[P(k) \Longrightarrow P(k+1)]$

On aura ainsi montré que la proposition est vraie pour tout entier supérieur ou égal à n_0

Raisonnement par récurrence

Un premier exemple

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Initialisation

Hérédité

On suppose que la proposition est vraie pour un entier quelconque $k \geq 1$:

On veut démontrer qu'elle est vraie pour l'entier $k + 1$:

Conclusion

$P(1)$ est vraie, la proposition est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Raisonnement par récurrence

Un deuxième exemple

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

On admet que la suite (u_n) est définie et strictement positive.

Démontrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, $u_n \leq 3$.

Initialisation

Hérédité

On suppose que la proposition est vraie pour un entier quelconque $k \geq 0$:

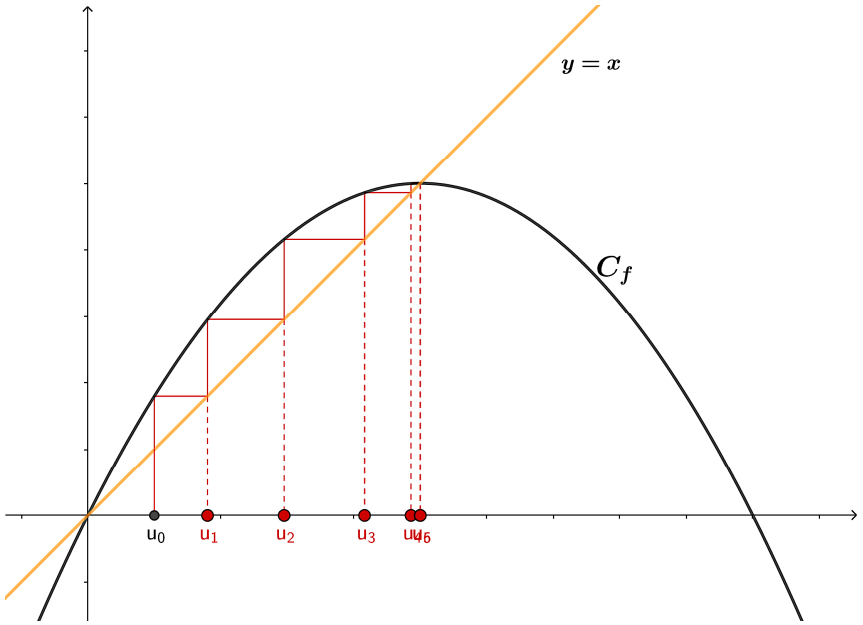
On veut démontrer qu'elle est vraie pour l'entier $k + 1$:

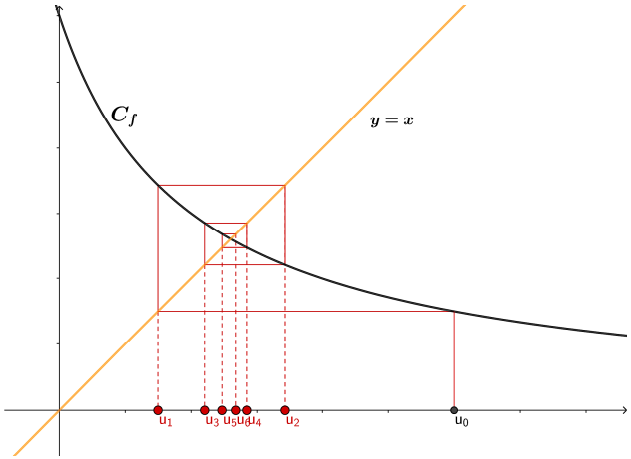
Conclusion

$P(0)$est vraie, la proposition est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

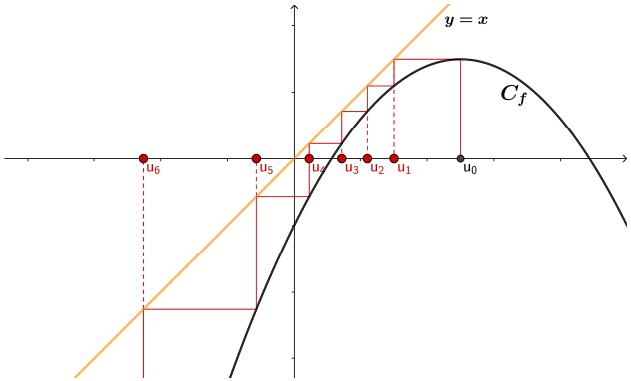
Étude de suites définies par une relation de récurrence

$f(x) = 2x(1-x)$
$u_0 = 0{,}1 \quad u_{n+1} = f(u_n)$





$f(x) = \frac{3}{x+1}$
$u_0 = 3 \quad u_{n+1} = f(u_n)$



$f(x) = -\frac{1}{5}(x-5)^2 + 3$
$u_0 = 5 \quad u_{n+1} = f(u_n)$

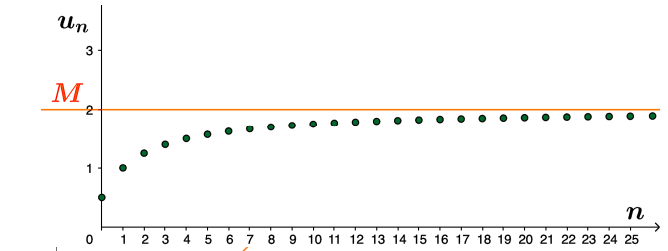
Étude de suites définies par une relation de récurrence

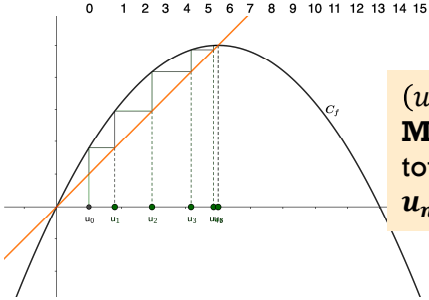
Théorème

Si la suite (u_n) est **croissante et majorée** alors (u_n) **converge**.

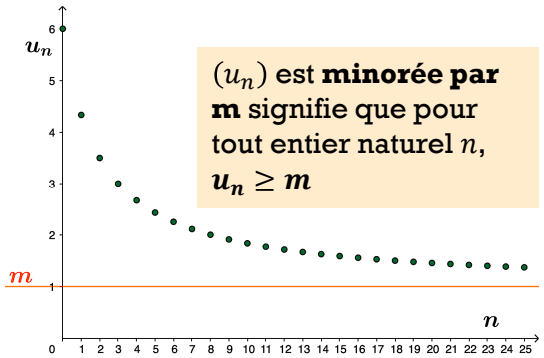
Si la suite (u_n) est **décroissante et minorée** alors (u_n) **converge**.

Illustration graphique





(u_n) est **majorée par M** signifie que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$



(u_n) est **minorée par m** signifie que pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$

Étude de suites définies par une relation de récurrence

Théorème
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $\ell \in I$. Soit (u_n) une suite à valeurs dans I.
Si (u_n) converge vers ℓ alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Exemple d'application
Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on définit les suites (u_n) et (v_n) ainsi :
$u_n = \frac{1}{n} + 1 \qquad v_n = e^{u_n}$

Calculer la limite de la suite (v_n).

EXERCICES

EXERCICE 1

On considère une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$u_0 = 0{,}1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2 - x)$

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;1]$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Calculer sa limite.

CORRECTION 1

Variations de f sur $[0\,;1]$

$f(x) = x(2-x)$

En déduire que la suite (u_n) converge.
Calculer sa limite.

$u_0 = 0{,}1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

EXERCICE 2

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est divisible par 9.

CORRECTION 2

P_n : « $10^n - 1$ est divisible par 9 »

EXERCICE 3

Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on considère la proposition P_n : « $2^n > n^2$ »

1. La propriété P_n est-elle héréditaire pour $n \geq 3$?
2. A-t-on, pour tout entier $n \geq 3$, l'inégalité $2^n > n^2$?