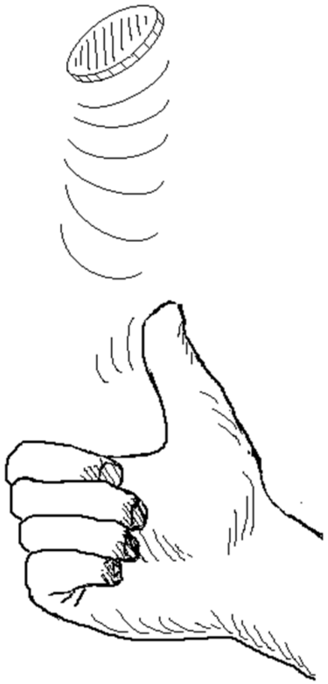
SOMME DE VARIABLES ALEATOIRES

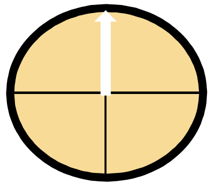
Blaise PASCAL
(1623-1662)



Andreï MARKOV
(1856-1922)

Questions flash

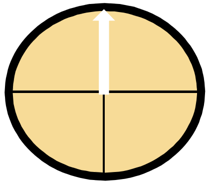
QUESTION 1



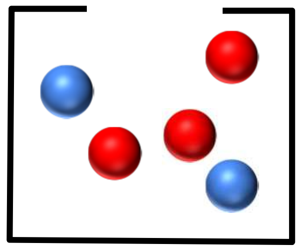
On lance une pièce de monnaie truquée de telle sorte qu'on a deux fois plus de chance d'obtenir pile plutôt que face.
On gagne un point si on tombe sur face et on ne gagne aucun point si on tombe sur pile.

En notant X ce nombre de points, déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

QUESTION 2



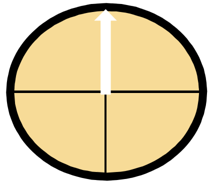
Une urne contient trois boules rouges et deux boules bleues indiscernables au toucher.
Pour tirer une boule de l'urne, on doit miser 9 euros.
Si la boule tirée est bleue, on gagne le double de cette mise.
Si la boule tirée est rouge, on perd la mise.



On note G le gain (algébrique) en euros à ce jeu.

1. Donner sous forme d'un tableau la loi de G.
2. Calculer l'espérance de G.

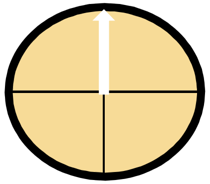
QUESTION 3



On lance deux fois un dé cubique équilibré.
On suppose que les lancers sont indépendants.
On note *S* la somme des deux chiffres obtenus.

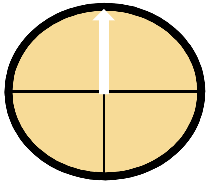
1. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire *S* ?
2. Calculer $p(S=12)$ et $p(S=3)$.

QUESTION 4



On a programmé un algorithme qui permet de répondre au hasard et de façon indépendante aux cinq questions d'un Q.C.M. que l'on souhaite tester.

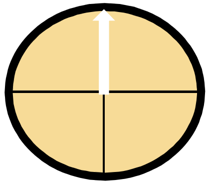
QUESTION 4



Le Q.C.M. est noté sur 5 points.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Une bonne réponse rapporte 1 point et une mauvaise réponse ne retire aucun point.

1. Calculer la probabilité que le programme obtienne 5 points.

QUESTION 4



Le Q.C.M. est noté sur 5 points.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Une bonne réponse rapporte 1 point et une mauvaise réponse ne retire aucun point.

2. Calculer la probabilité qu'il n'obtienne aucun point, puis qu'il obtienne au moins 1 point.

Regardons maintenant d'un peu plus près :

Pour la somme des deux chiffres du dé de la **question 3**, on peut écrire:

$$\boxed{S = C_1 + C_2}$$

où:

- C_1 est la variable aléatoire correspondant au chiffre obtenu au premier lancer,
- C_2 est la variable aléatoire correspondant au chiffre obtenu au second lancer.

Regardons maintenant d'un peu plus près :

Pour la note du Q.C.M. obtenue par le programme à la **question 4**, on peut écrire:

$$\boxed{N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}$$

où:

- *N* est la variable aléatoire correspondant au total des points obtenus.
  Nous avons vu que N suit la loi binomiale de paramètres 5 et ¼ .

- Chaque N_i est la variable aléatoire correspondant au nombre de points obtenus à <u>une question.</u>
  Chaque N_i suit la loi de Bernoulli de paramètre ¼ .

Question :

Lorsque $Z=X+Y$, peut-on déduire facilement des paramètres des lois des variables aléatoires X et Y les paramètres de la loi de Z ?

Aucun problème pour l’espérance :

- Linéarité de l’espérance.

Attention avec la variance :

$$V(aX) = a^2 V(X)$$

Attention avec la variance :

- un contre-exemple: $V(X) + V(-X) \neq V(X + (-X))$

Attention avec la variance :

- Additivité pour des variables aléatoires <u>indépendantes.</u>

Applications :

- Pour la loi binomiale

Applications:

- Pour un échantillon de taille n d'une loi de probabilité.

EXERCICES

EXERCICE 1

<u>Reprenons le cas du programme et du QCM.</u>

On a programmé un algorithme qui permet de répondre au hasard et de façon indépendante aux cinq questions d'un Q.C.M. que l'on souhaite tester.
Le Q.C.M. est noté sur 5 points.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Une bonne réponse rapporte 1 point et une mauvaise réponse ne retire aucun point.

EXERCICE 1

<u>Reprenons le cas du programme et du QCM.</u>

1. Lorsqu’on lance une fois le programme, combien de points peut-on espérer obtenir ?
2. Lorsqu’on lance 100 fois le programme, combien de points peut-on espérer obtenir en moyenne ?

EXERCICE 2

Dans une usine française, des masques sont fabriqués sur deux chaînes de production différentes.
Une étude statistique a permis de constater que:

- 5% des masques produits sur la première chaîne sont défectueux,
- 3% des masques produits sur la seconde chaîne sont défectueux.

EXERCICE 2

On prélève au hasard 20 masques à la sortie de la première chaîne et 30 à la sortie de la seconde.
On suppose ces deux prélèvements sont indépendants et, du fait de l'importance de la production journalière, on peut les assimiler à des tirages avec remise.
On note M le nombre de masques défectueux dans ce prélèvement de 50 masques.

Donner l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire *M*.