

Succession d'épreuves indépendantes

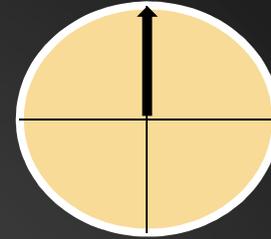
Schéma de Bernoulli et loi binomiale



Jacques Bernoulli
1654-1705

QUESTIONS FLASH

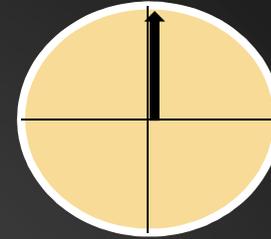
QUESTION 1



Ces épreuves successives sont-elles indépendantes ?

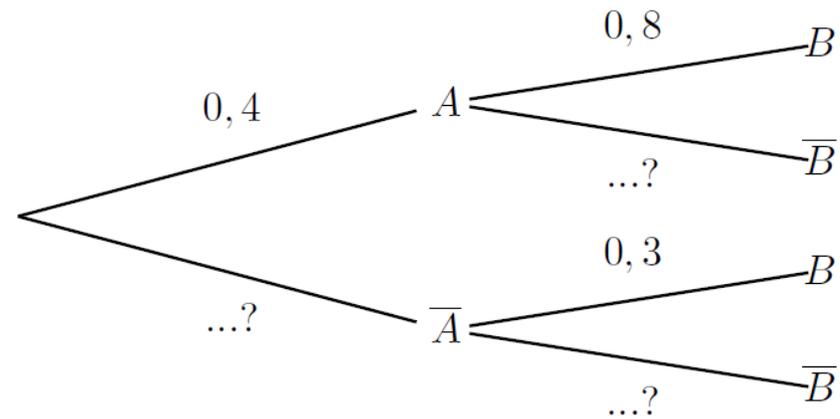
- On lance deux fois une pièce équilibrée
- On lance deux fois un même dé
- On tire successivement sans remise deux boules dans une même urne
- On choisit au hasard deux individus dans une population

QUESTION 2

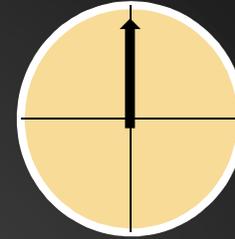


Compléter l'arbre

Les deux épreuves
successives sont-elles
indépendantes ?



QUESTION 3

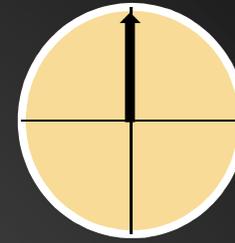


On lance dix fois de suite une pièce équilibrée :
on obtient 10 fois pile.

Au 1^{er} coup, a-t-on plus de chances d'obtenir
pile ou d'obtenir face ?

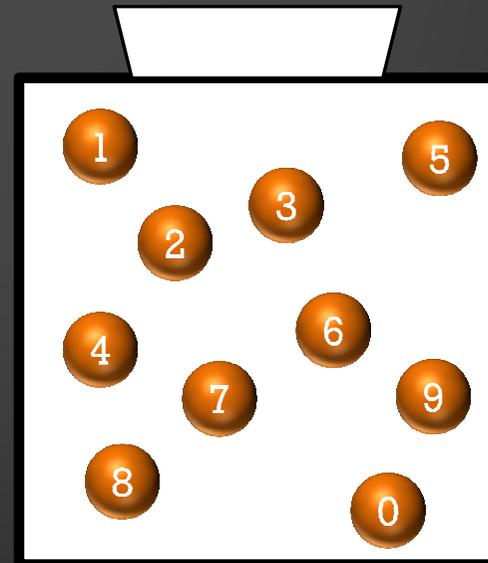


QUESTION 4



Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9.

On prend simultanément 3 boules. Combien y-a-t-il de combinaisons possibles ?



CORRECTION

QUESTION 1

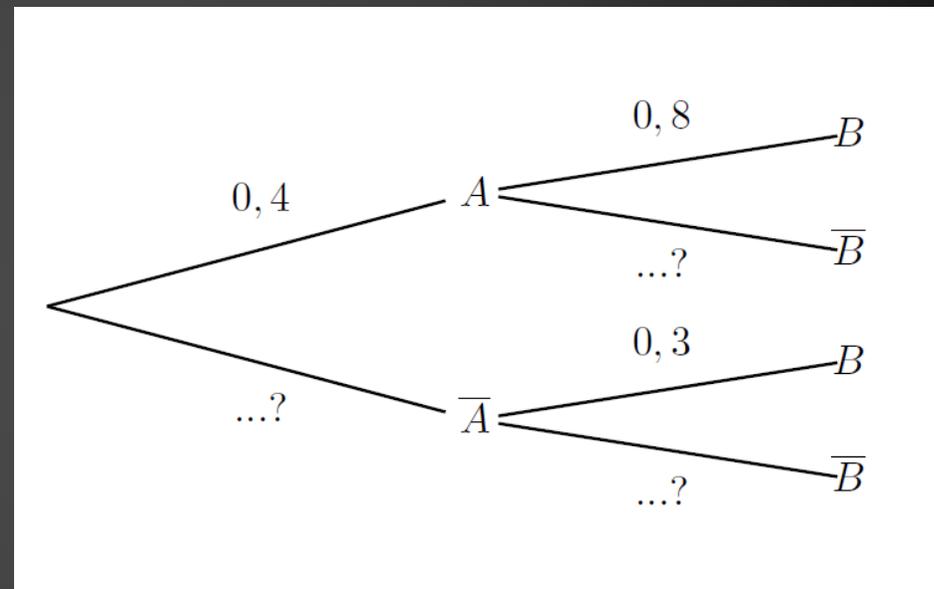
Ces épreuves successives sont-elles indépendantes ?

- On lance deux fois une pièce équilibrée
- On lance deux fois un même dé
- On tire successivement sans remise deux boules dans une même urne
- On choisit au hasard deux individus dans une population

QUESTION 2

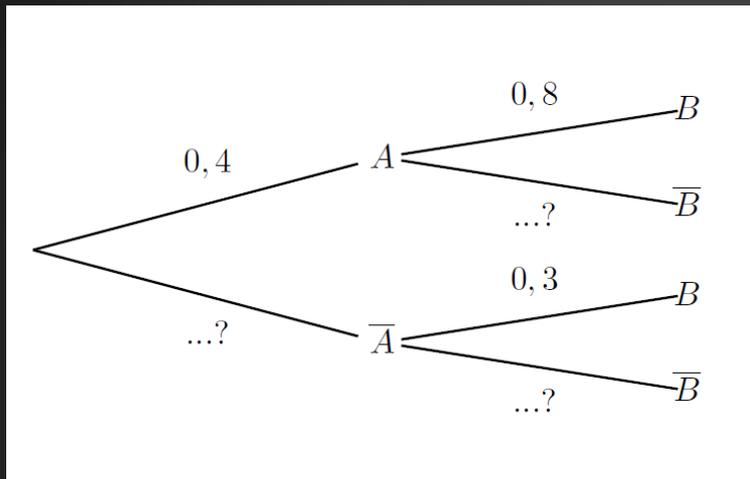
Compléter l'arbre.

Les deux épreuves successives sont-elles indépendantes ?



Des épreuves successives...

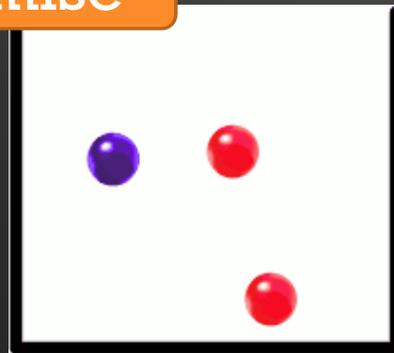
...dépendantes



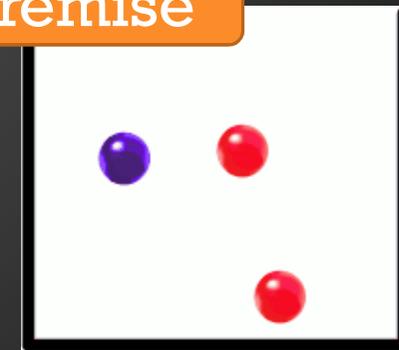
...indépendantes



Sans remise



Avec remise



QUESTION 3

On lance dix fois de suite une pièce équilibrée :
on obtient 10 fois pile.

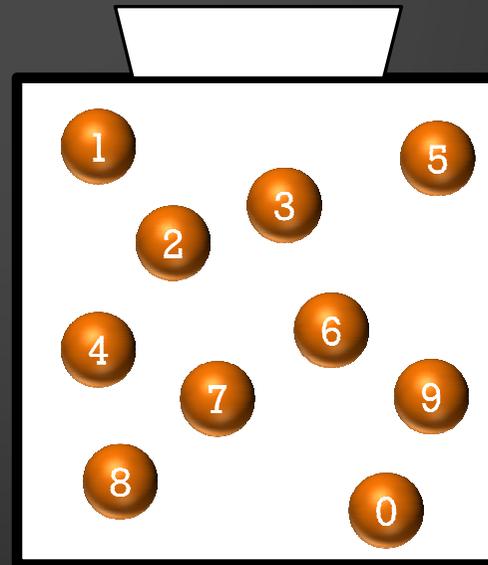
Au 11^e coup, a-t-on plus de chances d'obtenir
pile ou d'obtenir face ?



QUESTION 4

Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9.

On prend simultanément 3 boules. Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?



Successions d'épreuves indépendantes

Pour se tester un élève utilise une banque d'exercices sur ordinateur. L'ordinateur choisit au hasard trois questions de type QCM : une question de géométrie, une d'analyse et une de probabilité.

On appelle :

G l'événement : « l'élève réussit la question de Géométrie »

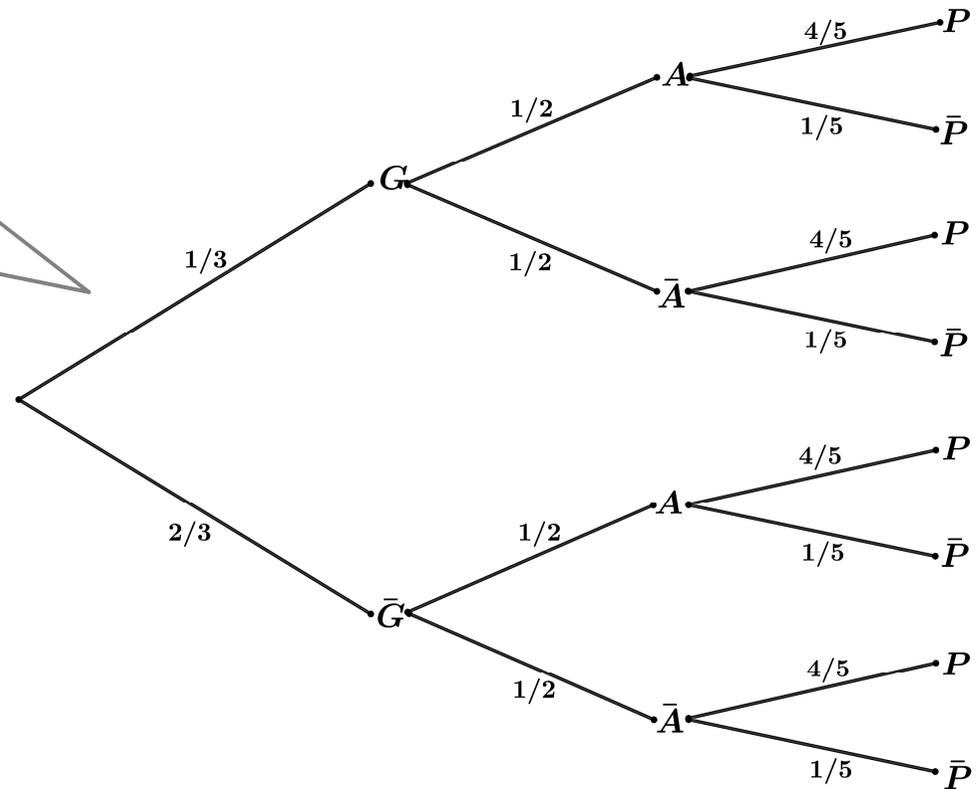
A l'événement : « l'élève réussit la question d'analyse »

P l'événement : « l'élève réussit la question de probabilité »

Pour cet élève on sait que : $p(G) = \frac{1}{3}$ $p(A) = \frac{1}{2}$ $p(P) = \frac{4}{5}$

Successions d'épreuves indépendantes

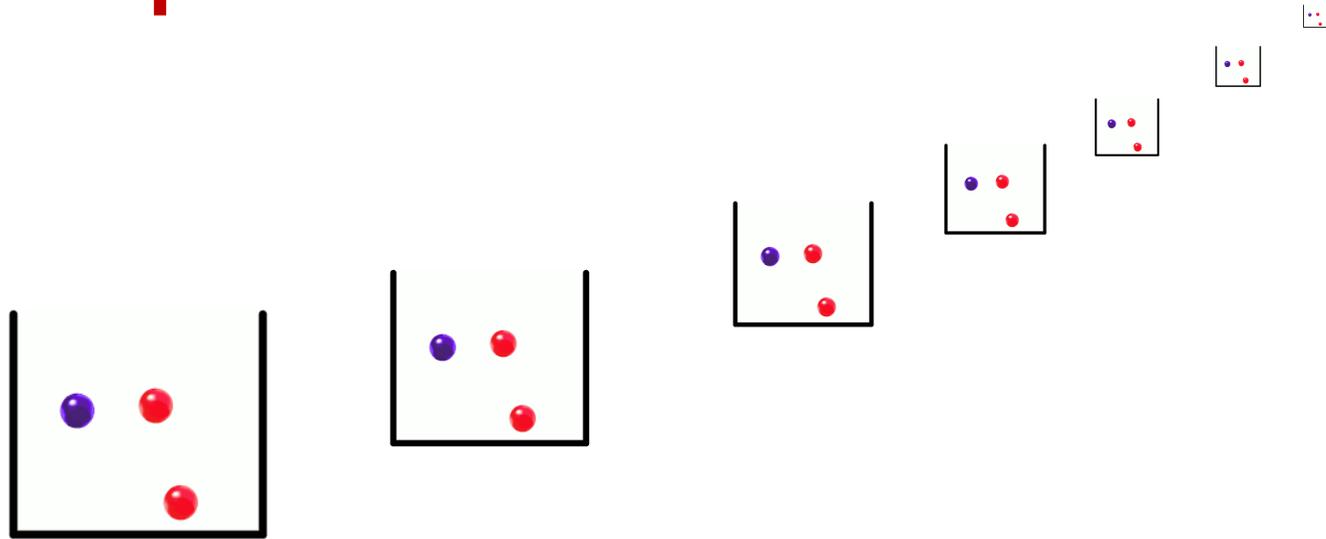
Quelle est la probabilité que cet élève réponde correctement aux trois questions ?



Modèle de la succession d'épreuves indépendantes

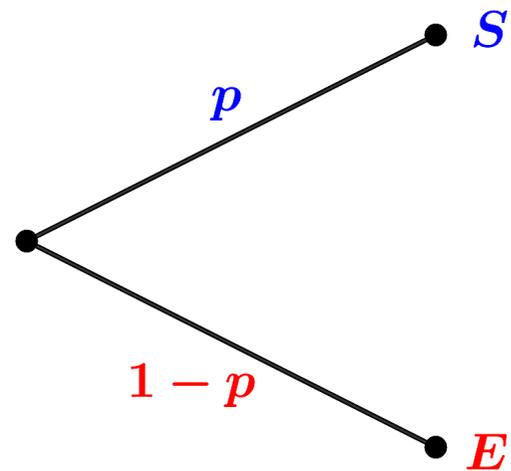
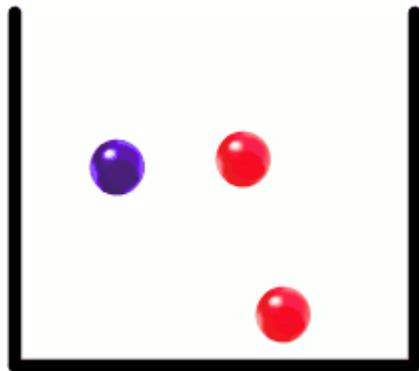
La probabilité d'une issue (x_1, \dots, x_n) est égale au produit des probabilités des composantes x_i , $1 \leq i \leq n$

Succession d'épreuves indépendantes... ... identiques à deux issues



Épreuve de Bernoulli

Deux issues : Succès – Échec



Épreuve de Bernoulli

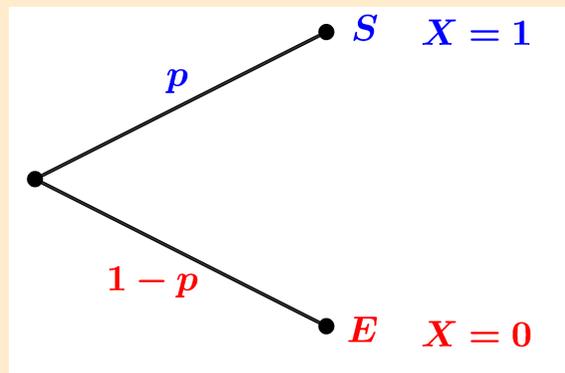
Variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli

Définition

Soit une épreuve comportant deux issues (Succès et Echec). On note p la probabilité de succès.

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de Succès et 0 sinon.

On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p .



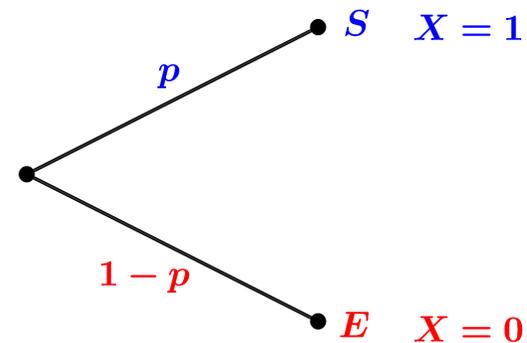
Épreuve de Bernoulli

Propriétés

$$E(X) = p$$

$$V(X) = pq, \text{ où } q = 1 - p$$

Démonstrations

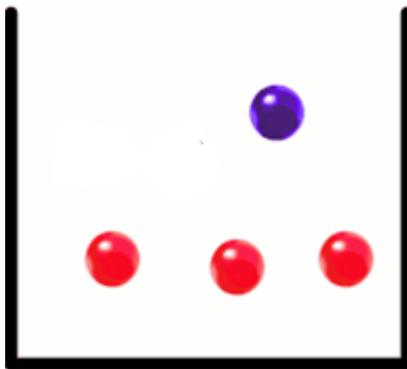


$$V(X) = P(X = 0) \times (0 - E(X))^2 + P(X = 1)(1 - E(X))^2$$

$$V(X) = (1 - p) \times (0 - p)^2 + p(1 - p)^2$$

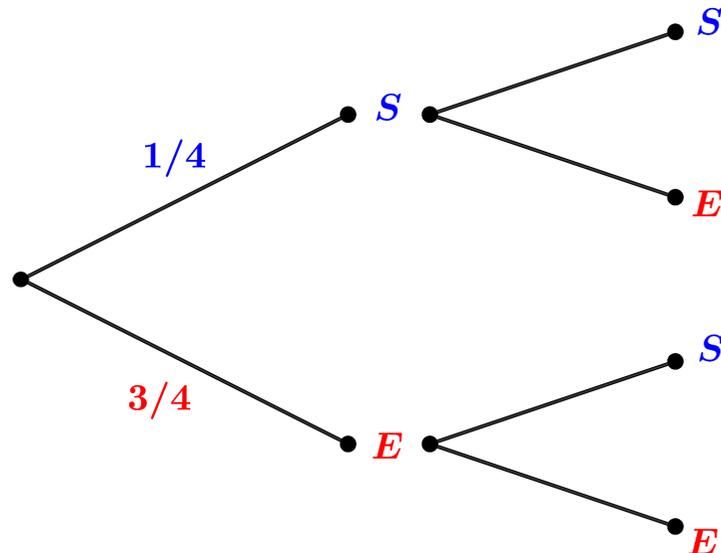
$$V(X) = (1 - p) \times p^2 + p(1 - p)^2 \dots$$

Répétition d'épreuves identiques de Bernoulli de façon indépendante : vers la loi binomiale



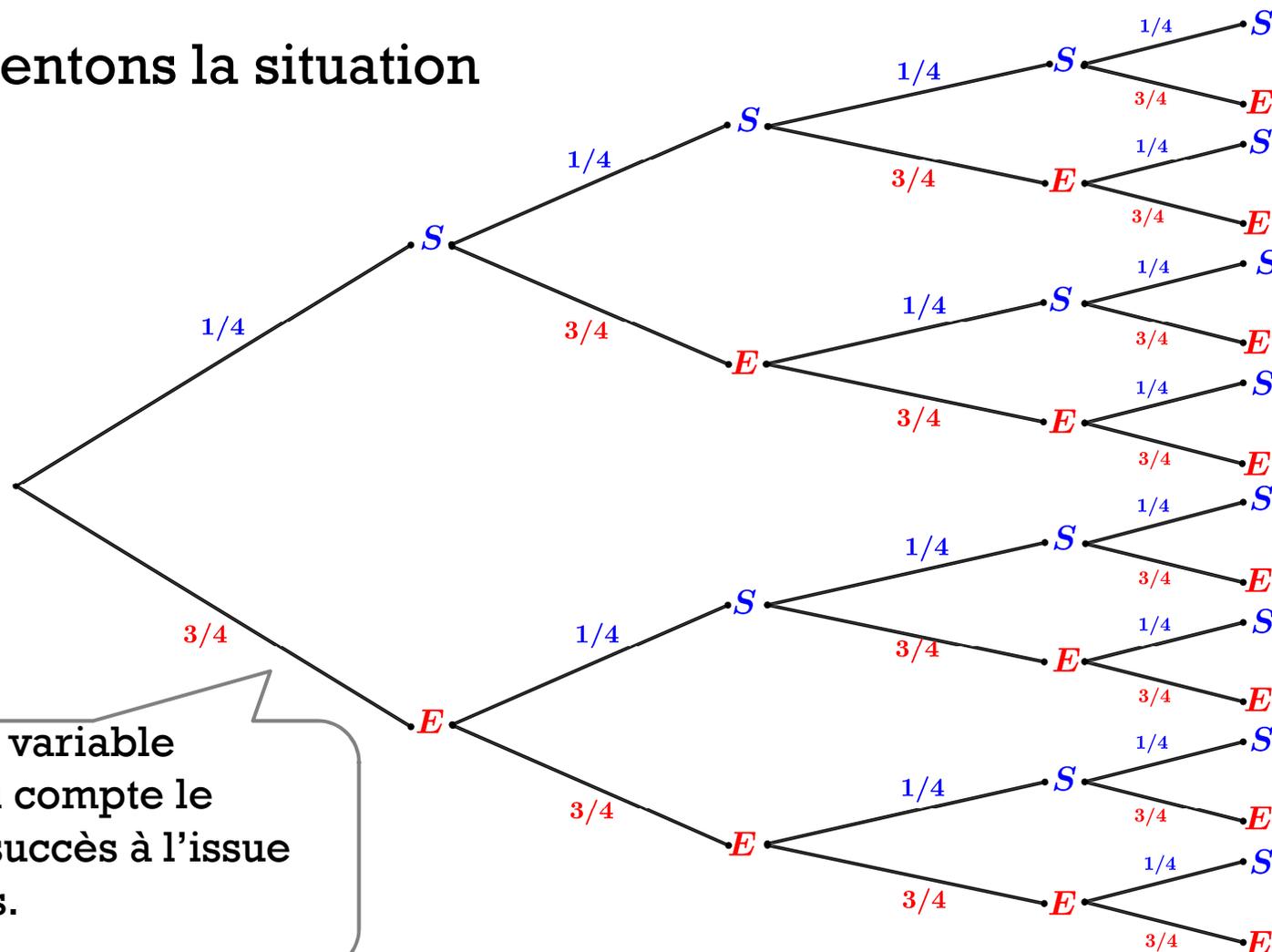
Succès : « tirer une boule bleue »

On répète cette épreuve 4 fois en remplaçant la boule tirée dans l'urne à chaque épreuve.



Répétition d'épreuves identiques de Bernoulli de façon indépendante : vers la loi binomiale

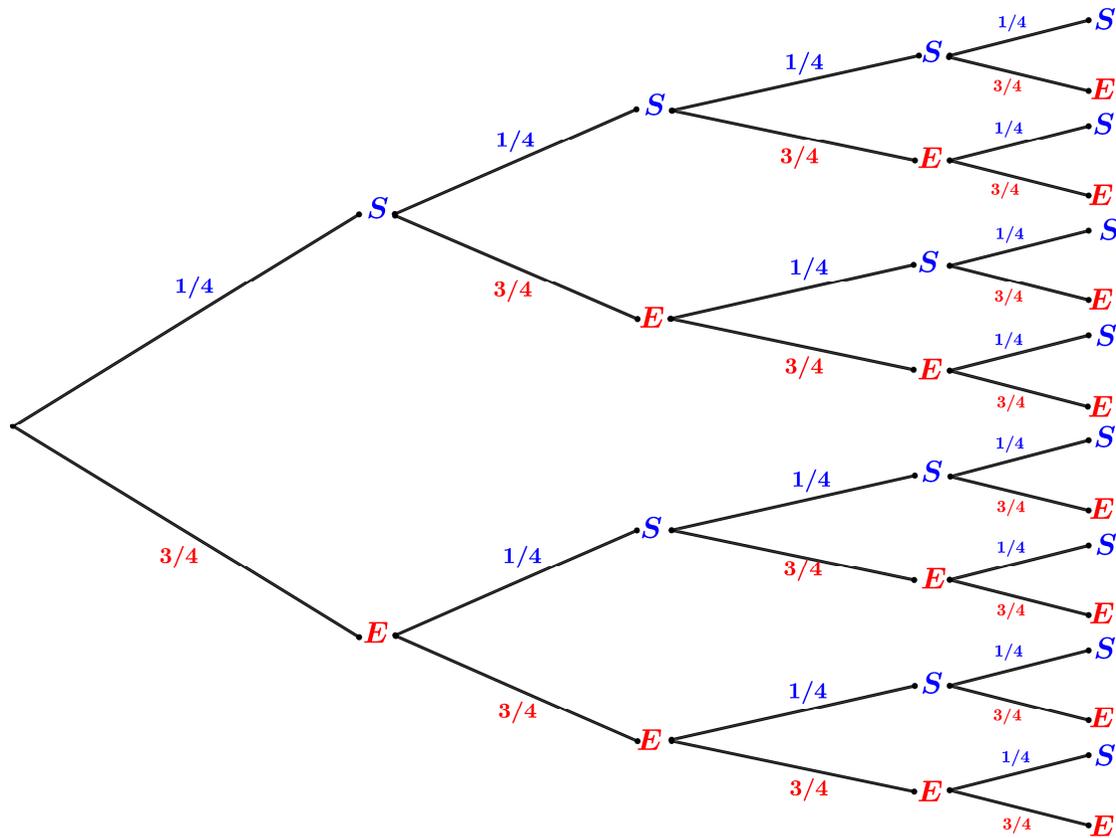
Représentons la situation



On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des 4 tirages.

Répétition d'épreuves identiques de Bernoulli de façon indépendante : vers la loi binomiale

On souhaite calculer la probabilité $P(X = 2)$



Répétition d'épreuves identiques de Bernoulli de façon indépendante : vers la loi binomiale

Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définitions

Soit n un entier naturel non nul.

Un schéma de Bernoulli est la répétition n fois d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre p , de manière indépendante

On note X la variable aléatoire égale au nombre de succès, X est à valeurs dans $\{0; 1; \dots; n\}$.

On dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p , notée $\mathcal{B}(n, p)$

Répétition d'épreuves identiques de Bernoulli de façon indépendante : vers la loi binomiale

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p , notée $\mathcal{B}(n, p)$

Pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$,

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Propriétés

X suit une loi binomiale de paramètre n et p .

$$E(X) = np$$

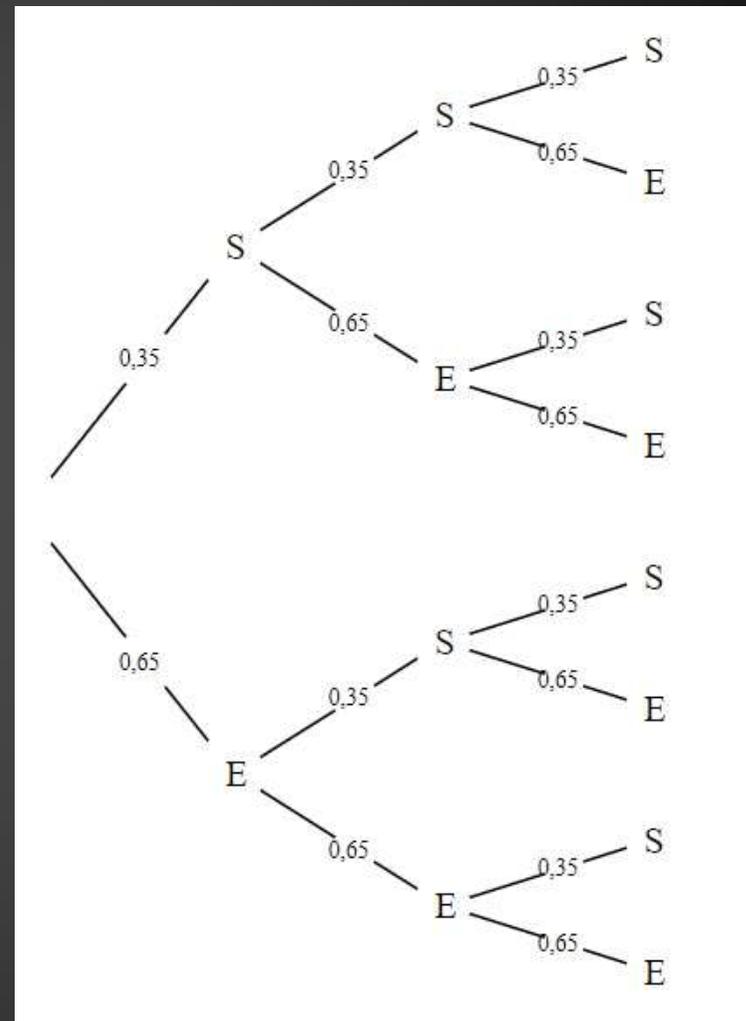
$$V(X) = np(1 - p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

EXERCICES

EXERCICE 1

La variable aléatoire X donne le nombre de succès.

- ✓ Quelles sont les valeurs prises par X ?
- ✓ Quelle loi suit la variable X ? donner ses paramètres.



EXERCICE 2

X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,4.

- ✓ Calculer la probabilité $P(X = 3)$
- ✓ Calculer la probabilité $P(X \geq 1)$

Avec la calculatrice, on sélectionne le mode distribution binomiale.

On entre les paramètres :

$n = 10$

$p = 0,4$

Nombre de succès = 3

On obtient directement le résultat

numérique approché : **0.214990848**

EXERCICE 3

Un fabricant produit des pièces métalliques en grande quantité. Il s'aperçoit que 5 % de sa production présente un défaut.

Lors d'un contrôle de qualité on prélève un échantillon de 25 pièces au hasard dans cette production. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne 3 pièces défectueuses.

CORRECTION 3

Un fabricant produit des pièces métalliques en grande quantité. Il s'aperçoit que 5 % de sa production présente un défaut.

Lors d'un contrôle de qualité on prélève un échantillon de 25 pièces au hasard dans cette production. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne 3 pièces défectueuses.

Avec la calculatrice, on sélectionne le mode distribution binomiale.

On entre les paramètres :

$$n = 25$$

$$p = 0,05$$

Nombre de succès = 3

On obtient directement le résultat numérique approché : **0.0930158942**