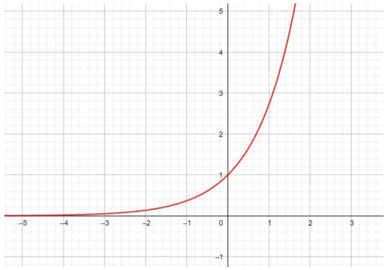
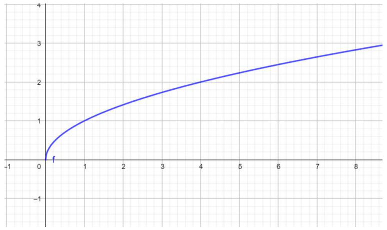
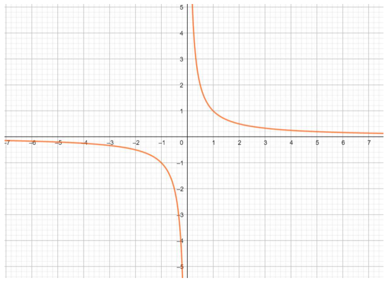
Synthèse sur les fonctions

« Convexité de f »



« Théorème des valeurs intermédiaires »





$\lim_{x \to +\infty} f(x)$

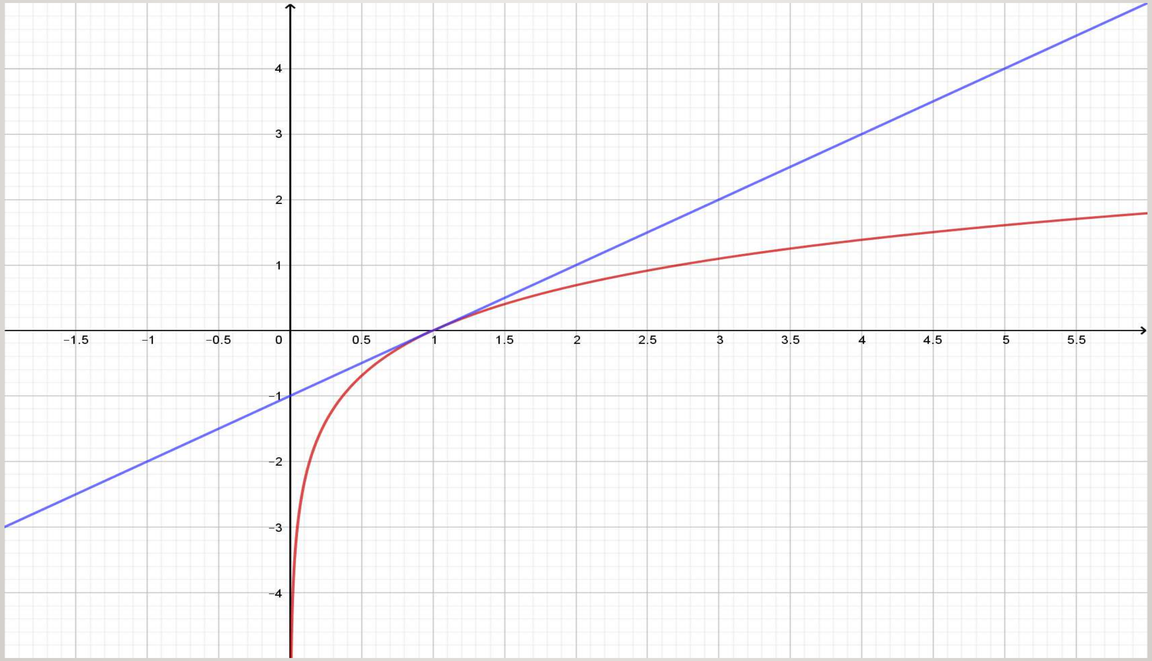
« Convergence de u_n »

« Équation différentielle $y' = ay + b$ »

EXERCICES

EXERCICE 1

Montrer que $\ln(x) \leq x - 1$, pour tout réel $x > 0$



EXERCICE 1

Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \ln(x) - x + 1$

Étudier la fonction h et donner son tableau de variations

En déduire le signe de h sur $]0;+\infty[$

EXERCICE 1

Autre version de l'exercice

Utiliser la convexité de la fonction logarithme népérien pour montrer que $\ln(x) \leq x - 1$, pour tout réel $x > 0$.

CORRECTION 1

Première version : Étude de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par

$$h(x) = \ln(x) - x + 1$$

CORRECTION 1

Deuxième version : Étude de la convexité de la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 2

Les mesures de l'évolution, pendant 20 minutes, du taux de CO_2 (exprimé en pourcentage) contenu dans un local industriel dans lequel est testée une hotte aspirante conduisent à la modélisation par une fonction f définie sur $[0; 20]$ par $f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)e^{-0{,}5t} + 0{,}03$

1. Selon ce modèle, quel est le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant le test ?
2. Montrer que, selon ce modèle, il existe un instant T où le taux de CO_2 est égal à 3,5%. Proposer un algorithme donnant une valeur approchée à $0{,}1$ près de T.
3. a. Montrer que la fonction F définie sur $[0; 11]$ par $F(t) = (-1{,}6t - 3{,}6)e^{-0{,}5t} + 0{,}03t$ est une primitive de f sur $[0; 11]$.

   b. Déterminer, selon ce modèle, le taux moyen V_m (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

CORRECTION 2

$$f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)e^{-0{,}5t} + 0{,}03 \text{ sur } [0; 20]$$

1. Selon ce modèle, quel est le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant le test ?

CORRECTION 2

$$f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)e^{-0{,}5t} + 0{,}03 \text{ sur } [0; 20]$$

2. Montrer que, selon ce modèle, il existe un instant T où le taux de CO_2 est égal à 3,5%. Proposer un algorithme donnant une valeur approchée à $0{,}1$ près de T.

CORRECTION 2

$$f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)e^{-0{,}5t} + 0{,}03 \text{ sur } [0; 20]$$

3.a. Montrer que la fonction F définie sur $[0; 11]$ par $F(t) = (-1{,}6t - 3{,}6)e^{-0{,}5t} + 0{,}03t$ est une primitive de f sur $[0; 11]$.

b. Déterminer, selon ce modèle, le taux moyen V_m (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

EXERCICE 3

On administre un analgésique au moyen d'une perfusion à débit continu et on souhaite arrêter la perfusion lorsque la quantité de cet analgésique présente dans l'organisme du patient aura atteint le seuil de 15 µg.

EXERCICE 3

Modélisation discrète

L'observation conduit à modéliser la situation par la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0{,}1(16 - u_n)$ où n est le nombre de minutes écoulées depuis le début de la perfusion.

1. Écrire un algorithme permettant de déterminer à la minute près l'instant auquel, d'après ce modèle discret, la perfusion devra être stoppée.
2. Étudier la nature de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 16 - u_n$. En déduire une expression de u_n en fonction de n, puis étudier son comportement à l'infini.

EXERCICE 3

Modélisation continue

La situation peut être modélisée par une fonction solution de l'équation différentielle

$$y' = 0{,}1(16 - y)$$

a. Résoudre l'équation différentielle
b. Sachant que le taux initial est égal à 0, déterminer à la minute près l'instant auquel, d'après ce modèle continu, la perfusion devra être stoppée.
c. Déterminer le comportement à l'infini de la fonction solution de l'équation différentielle.

CORRECTION 3

Modélisation discrète

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} - u_n = 0{,}1(16 - u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

Écrire un algorithme permettant de déterminer à la minute près l'instant auquel, d'après ce modèle discret, la perfusion devra être stoppée.

CORRECTION 3

Modélisation discrète

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}6 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

Étudier la nature de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 16 - u_n$. En déduire une expression de u_n en fonction de n, puis étudier son comportement à l'infini.

CORRECTION 3

Modélisation continue

$$y' = 0{,}1(16 - y)$$

Résoudre l'équation différentielle

CORRECTION 3

Modélisation continue

Sachant que le taux initial est égal à 0, déterminer à la minute près l'instant auquel, d'après ce modèle continu, la perfusion devra être stoppée.

CORRECTION 3

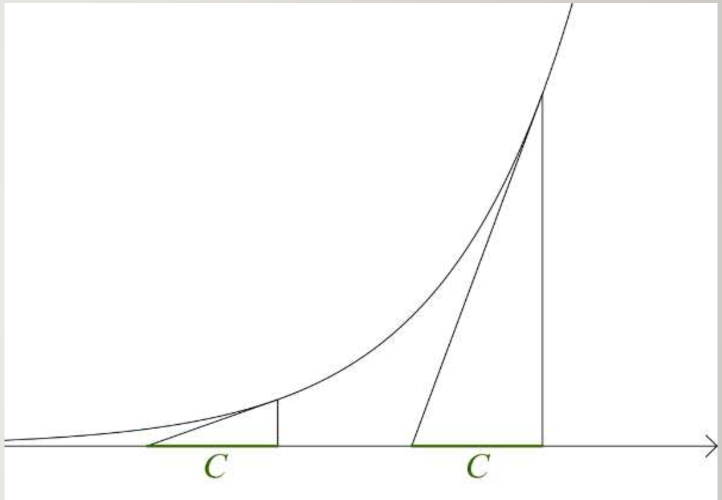
Modélisation continue

Déterminer le comportement à l’infini de la fonction solution de l’équation différentielle.

EXERCICE 4

Problème de Florimond de Beaune

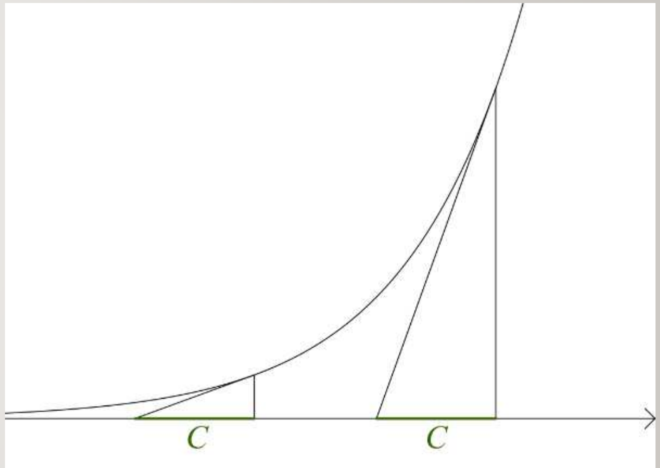
« Trouver une courbe telle qu'en tout point, la sous-tangente C soit constante »



EXERCICE 4

Soit f dérivable sur I et $a \in I$
On supposera f et f' strictement positive sur I
Soit C_f la courbe représentative de f et T la tangente à C_f au point d'abscisse a

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de T avec l'axe des abscisses
2. En déduire la condition que doit vérifier f pour que sa courbe soit solution du problème de Florimond de Beaune



CORRECTION 4