Une introduction aux graphes

octobre 2020

Plan

Plan : 1 - Définitions : graphes, sommets, arêtes, voisins, chemins

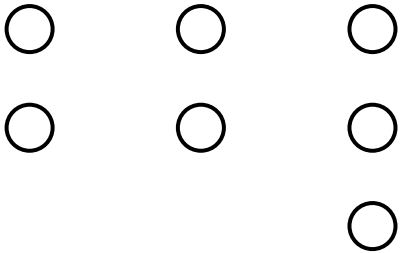
Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe c'est :

Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe c'est :

- Des points — appelés **sommets** ou nœuds.

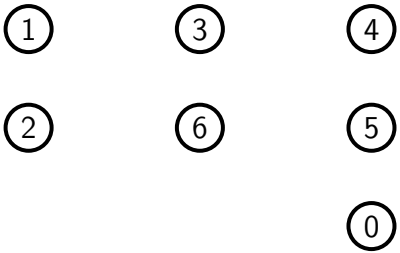


Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe c'est :

- Des points — appelés **sommets** ou nœuds.

⇝ on peut les numéroter, par exemple ici à partir de 0.



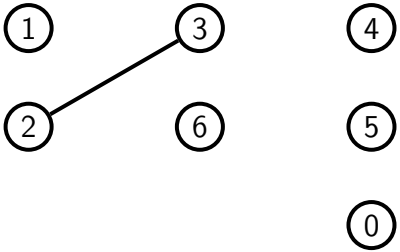
Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe c'est :

- Des points — appelés **sommets** ou nœuds.

⇝ on peut les numéroter, par exemple ici à partir de 0.

- Des liaisons entre ces points — appelées **arêtes** ou arcs.



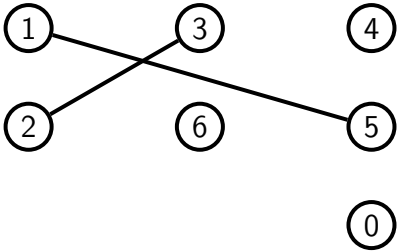
Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe c'est :

- Des points — appelés **sommets** ou nœuds.

⇝ on peut les numéroter, par exemple ici à partir de 0.

- Des liaisons entre ces points — appelées **arêtes** ou arcs.



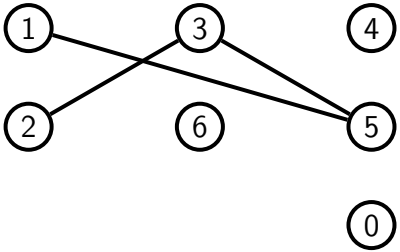
Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe c'est :

- Des points — appelés **sommets** ou nœuds.

⇝ on peut les numéroter, par exemple ici à partir de 0.

- Des liaisons entre ces points — appelées **arêtes** ou arcs.



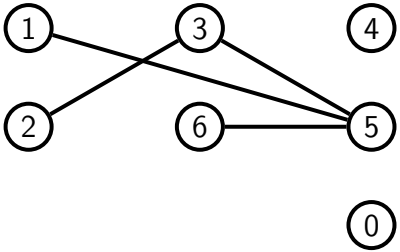
Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe c'est :

- Des points — appelés **sommets** ou nœuds.

⇝ on peut les numéroter, par exemple ici à partir de 0.

- Des liaisons entre ces points — appelées **arêtes** ou arcs.



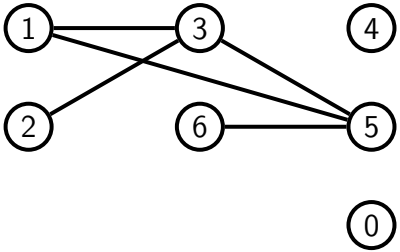
Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe c'est :

- Des points — appelés **sommets** ou nœuds.

⇝ on peut les numéroter, par exemple ici à partir de 0.

- Des liaisons entre ces points — appelées **arêtes** ou arcs.



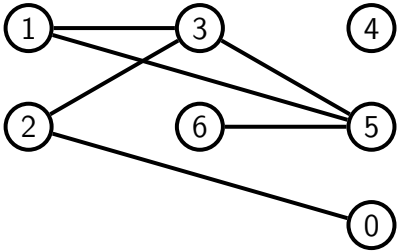
Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe c'est :

- Des points — appelés **sommets** ou nœuds.

⇝ on peut les numéroter, par exemple ici à partir de 0.

- Des liaisons entre ces points — appelées **arêtes** ou arcs.



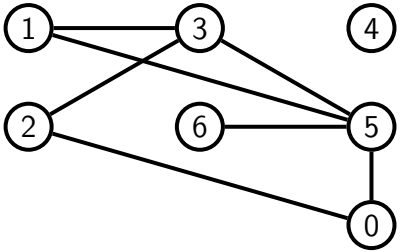
Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe c'est :

- Des points — appelés **sommets** ou nœuds.

⇝ on peut les numéroter, par exemple ici à partir de 0.

- Des liaisons entre ces points — appelées **arêtes** ou arcs.

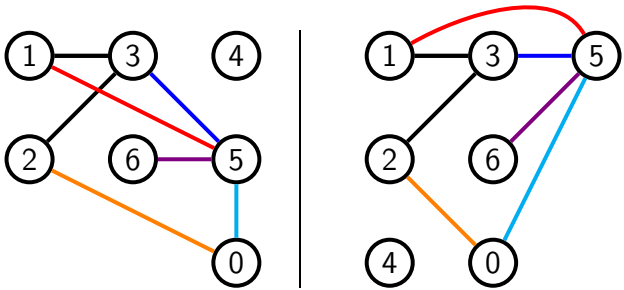


(fin)

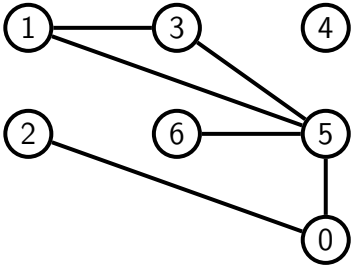
Qu'est-ce qu'un graphe ?

On ne tient pas compte de la position des points, ni de la forme des arêtes, ni des croisements d'arêtes.

Deux représentations d'un même graphe :

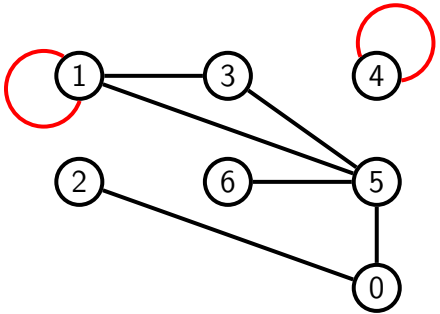


Quelques variantes qui élargissent cette définition



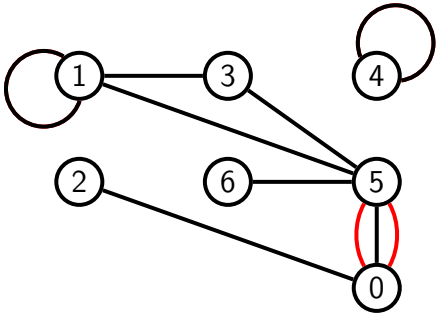
Quelques variantes qui élargissent cette définition

- Certaines arêtes relient un sommet à lui-même.



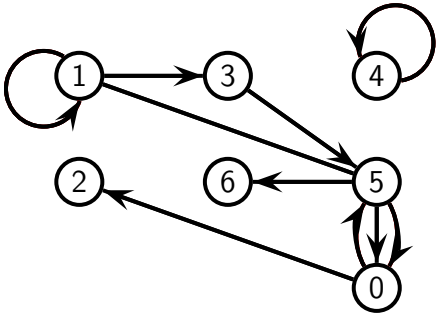
Quelques variantes qui élargissent cette définition

- Certaines arêtes relient un sommet à lui-même.
- Il y a plusieurs arêtes entre deux sommets donnés.



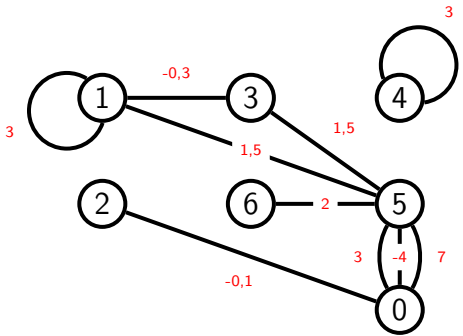
Quelques variantes qui élargissent cette définition

- Certaines arêtes relient un sommet à lui-même.
- Il y a plusieurs arêtes entre deux sommets donnés.
- Les arêtes sont « orientées ».



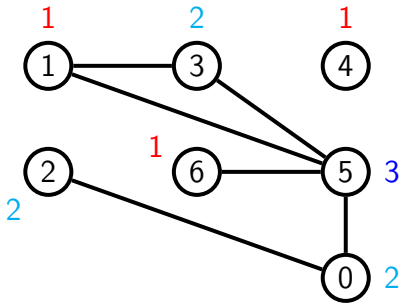
Quelques variantes qui élargissent cette définition

- Certaines arêtes relient un sommet à lui-même.
- Il y a plusieurs arêtes entre deux sommets donnés.
- Les arêtes sont « orientées ».
- Les arêtes sont « pondérées (ou valuées) » par un nombre.



Quelques variantes qui élargissent cette définition

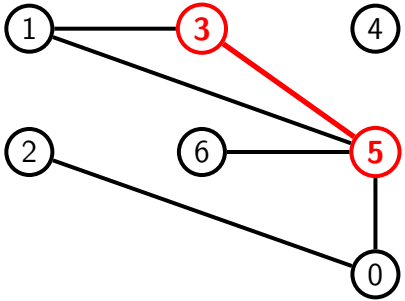
- Certaines arêtes relient un sommet à lui-même.
- Il y a plusieurs arêtes entre deux sommets donnés.
- Les arêtes sont « orientées ».
- Les arêtes sont « pondérées (ou valuées) » par un nombre.
- Les sommets sont « colorés ».



Vocabulaire supplémentaire

Sommets voisins (ou adjacents)

Deux sommets sont voisins s'il existe une arête qui les relie.

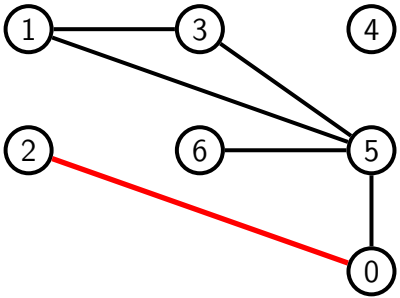


les sommets 3 et 5 sont voisins

Vocabulaire supplémentaire

Chemin dans un graphe

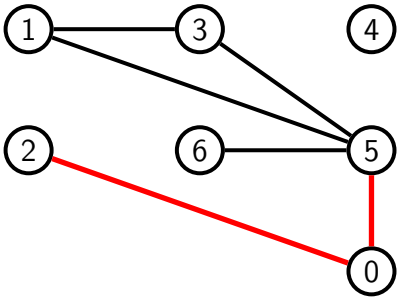
C'est une suite de sommets telle que deux sommets consécutifs sont toujours voisins.



Vocabulaire supplémentaire

Chemin dans un graphe

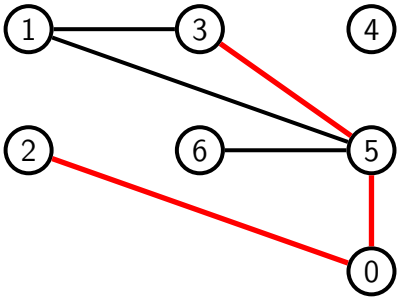
C'est une suite de sommets telle que deux sommets consécutifs sont toujours voisins.



Vocabulaire supplémentaire

Chemin dans un graphe

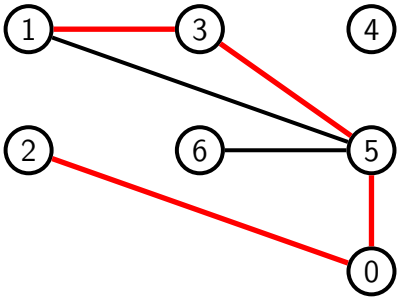
C'est une suite de sommets telle que deux sommets consécutifs sont toujours voisins.



Vocabulaire supplémentaire

Chemin dans un graphe

C'est une suite de sommets telle que deux sommets consécutifs sont toujours voisins.



Chemin : 2-0-5-3-1

Plan : 2 - Applications des graphes

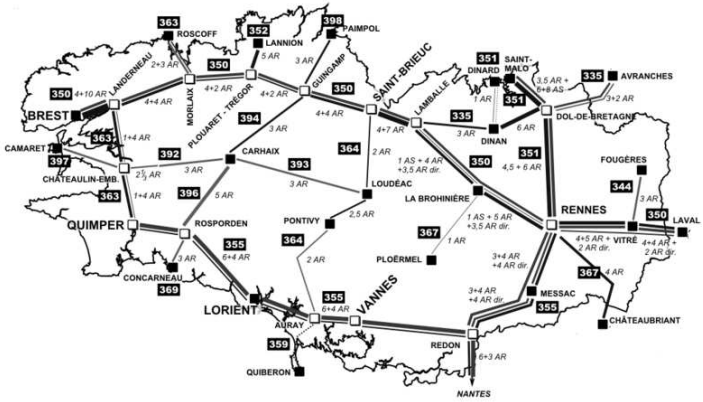
Pourquoi s'intéresser aux graphes ?

Ils permettent de schématiser de nombreuses situations et d'étudier les problèmes qu'elles posent ; par exemple (*sommets/arêtes*) :

- réseau informatique (*ordinateurs/connexions*), réseau internet (*serveurs/connexions*), réseau social (*membres/liens sociaux*)

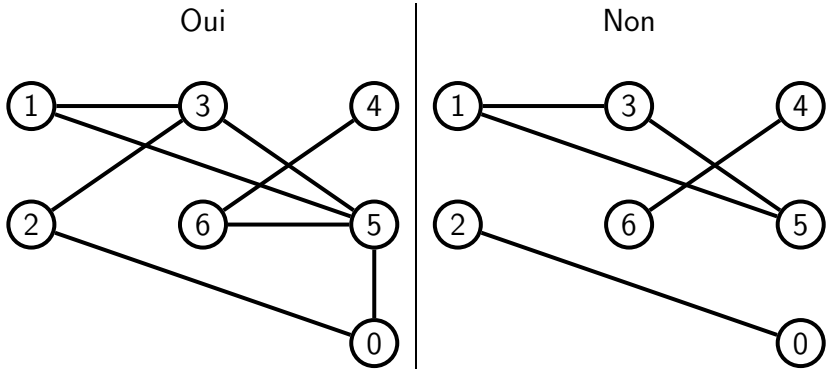
Pourquoi s'intéresser aux graphes ?

- voies de transports entre lieux géographiques (*villes/routes* ; *aéroports/lignes aériennes* ; *stations/métro*, etc.) ;



Quelques problèmes classiques sur les graphes

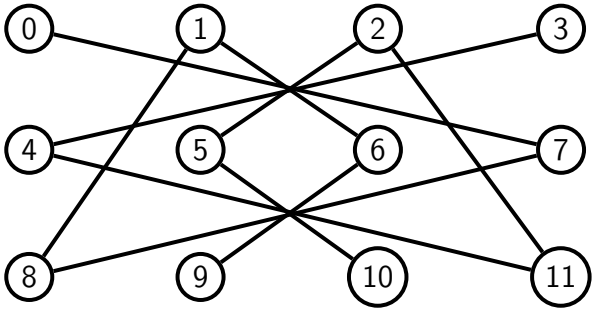
- Peut-on relier deux sommets quelconques par un chemin (connexité du graphe) ?



Connexité d'un graphe

Exercice

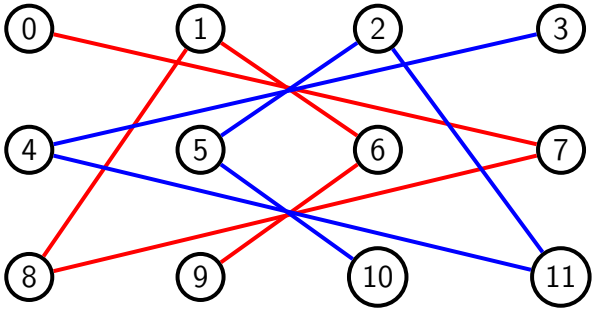
Le graphe suivant est-il connexe ?



Connexité d'un graphe

Exercice

Le graphe suivant est-il connexe ?

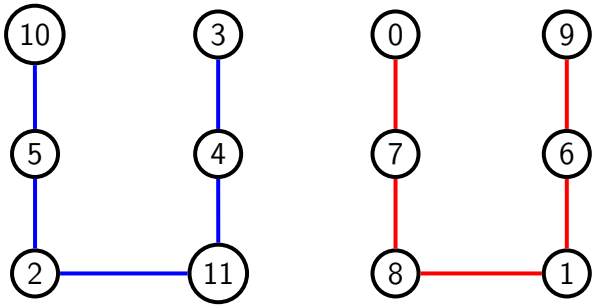


Non : les croisements d'arêtes forment une illusion d'optique !

Connexité d'un graphe

Exercice

Le graphe suivant est-il connexe ?



Non : les croisements d'arêtes forment une illusion d'optique !
Cela aurait été plus clair dessiné ainsi.

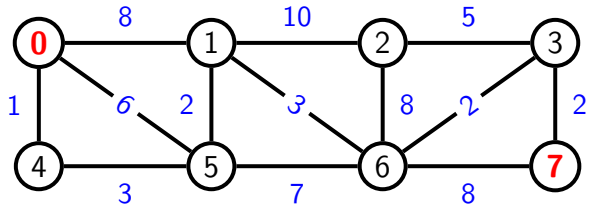
Quelques problèmes classiques sur les graphes

- Pour deux sommets reliables par un chemin, quel chemin passe par le minimum de sommets intermédiaires (plus court chemin dans le métro ou trajet SNCF) ?
- Chemin dans un graphe pondéré qui minimise la somme des poids (itinéraire GoogleMap — poids=distances en km).

Plus court chemin dans un graphe

Exercice

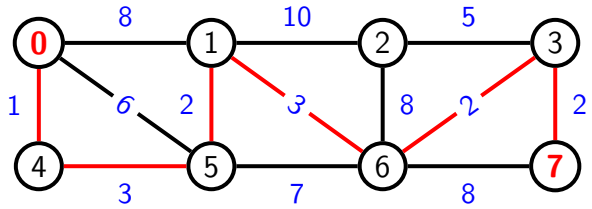
Trouver le chemin le plus court entre les sommets 0 et 7 du graphe pondéré suivant (les arêtes sont pondérées par les distances en km entre les sommets) :



Plus court chemin dans un graphe

Exercice

Trouver le chemin le plus court entre les sommets 0 et 7 du graphe pondéré suivant (les arêtes sont pondérées par les distances en km entre les sommets) :



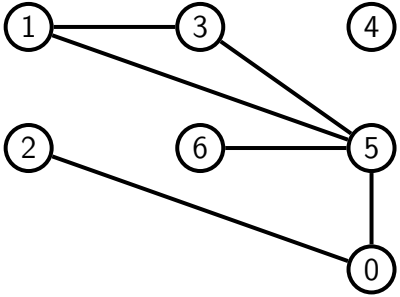
$\rightsquigarrow$ comment l'ordinateur peut-il faire ce calcul ?

Plan : 3 - Représentation informatique d'un graphe

Comment représenter un graphe en informatique ?

Il y a plusieurs possibilités. Il faut choisir celle qui est la mieux adaptée au problème posé.

- Donner la liste `S` des sommets et la liste `A` des arrêtes :



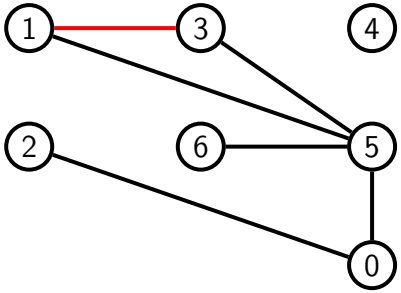
`S=[0,1,2,3,4,5,6]`

`A=[[1,3],[3,5],[1,5],[6,5],[5,0],[2,0]]`

⇝ cette représentation s'adapte aussi aux graphes orientés.

Comment représenter un graphe en informatique ?

- Par une matrice d'adjacence :



0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	**1**	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
0	**1**	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0

Le coefficient de la ligne `i` et de la colonne `j` vaut `1` si les sommets `i` et `j` sont voisins, et vaut `0` sinon.

⇝ cette représentation s'adapte aussi aux graphes orientés.

Comment représenter une matrice en Python ?

Il n'existe pas de type matrice par défaut.

Comment représenter une matrice en Python ?

Il n'existe pas de type matrice par défaut.

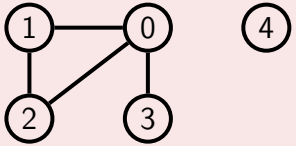
- Utiliser une liste de listes :

```
In [1]: M=[[0, 1, 2],
          [3, 4, 5],
          [6, 7, 8]]
In [2]: M[1][0]
Out[2]: 3
```

Comment représenter un graphe en informatique ?

QCM

Quelle matrice est la matrice d'adjacence du graphe suivant ?

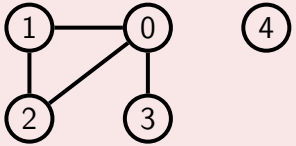


A	B	C	D
0 1 0 0 0	0 1 1 1 0	0 1 1 1 0	0 1 1 1 0
0 0 0 1 0	1 0 1 0 0	1 0 1 0 0	1 0 0 1 0
1 0 0 1 0	1 1 0 0 1	1 1 0 0 0	1 0 0 0 0
0 1 0 0 1	1 0 0 0 1	1 0 0 0 0	1 1 0 0 0
1 0 1 0 0	0 0 1 1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0

Comment représenter un graphe en informatique ?

QCM

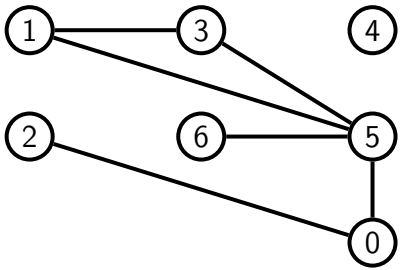
Quelle matrice est la matrice d'adjacence du graphe suivant ?



A	B	C	D
0 1 0 0 0	0 1 1 1 0	0 1 1 1 0	0 1 1 1 0
0 0 0 1 0	1 0 1 0 0	1 0 1 0 0	1 0 0 1 0
1 0 0 1 0	1 1 0 0 1	1 1 0 0 0	1 0 0 0 0
0 1 0 0 1	1 0 0 0 1	1 0 0 0 0	1 1 0 0 0
1 0 1 0 0	0 0 1 1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
non symétrique	trop d'arêtes		mauvaise d'arête

Comment représenter un graphe en informatique ?

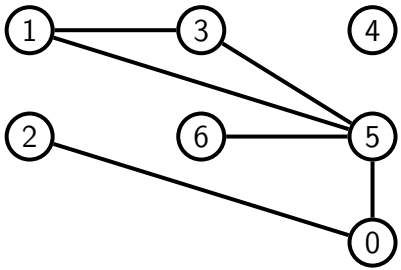
- Par un dictionnaire d'adjacence qui a pour clefs chaque sommet, avec comme valeur associée la liste des voisins de ce sommet.




```
ADJ={0:[2,5],1:[3,5],2:[0],3:[1,5],4:[],
     5:[0,1,3,6],6:[5]}
```

Comment représenter un graphe en informatique ?

- Par un dictionnaire d'adjacence qui a pour clefs chaque sommet, avec comme valeur associée la liste des voisins de ce sommet.

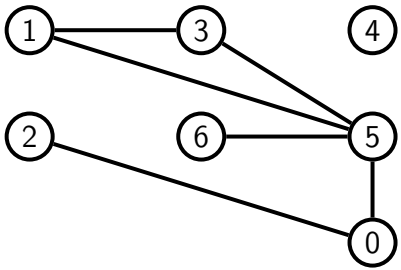



```
ADJ={0:[2,5],1:[3,5],2:[0],3:[1,5],4:[],
     5:[0,1,3,6],6:[5]}
```

`ADJ[1]` → `[3,5]`

Comment représenter un graphe en informatique ?

- Par un dictionnaire d'adjacence qui a pour clefs chaque sommet, avec comme valeur associée la liste des voisins de ce sommet.




```
ADJ={0:[2,5],1:[3,5],2:[0],3:[1,5],4:[],
     5:[0,1,3,6],6:[5]}
```

`ADJ[1]` $\rightarrow$ `[3,5]`

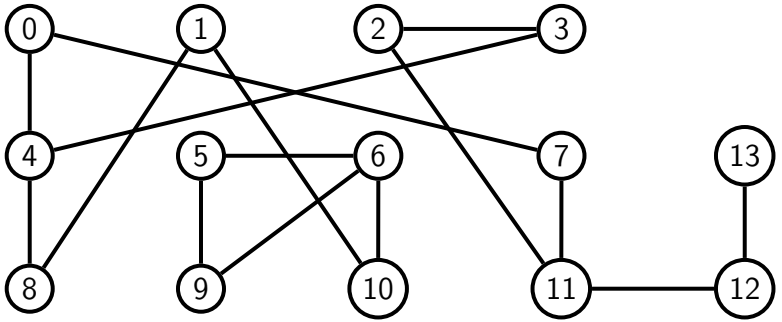
$\rightsquigarrow$ cette représentation s'adapte aussi aux graphes orientés.

Plan : 4 - Exemple : existence d'un chemin entre deux sommets

Existence d'un chemin entre deux sommets

Recherche d'un chemin de 8 à 5

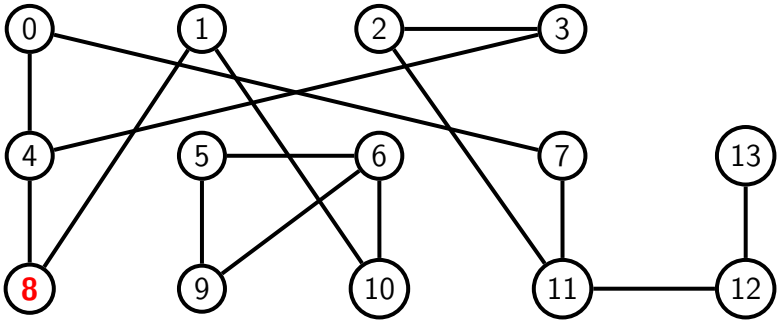
Principe :



Existence d'un chemin entre deux sommets

Recherche d'un chemin de 8 à 5

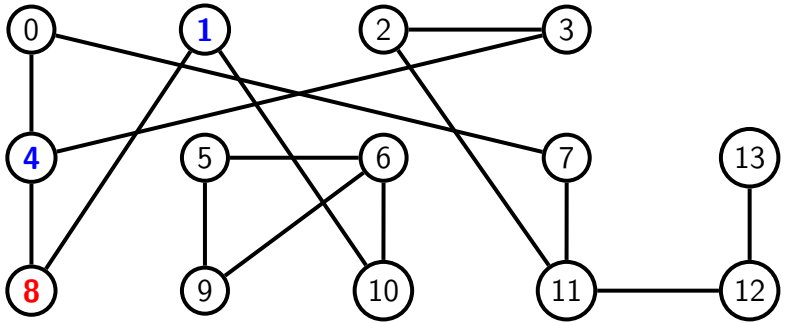
Principe : on part d'un sommet



Existence d'un chemin entre deux sommets

Recherche d'un chemin de 8 à 5

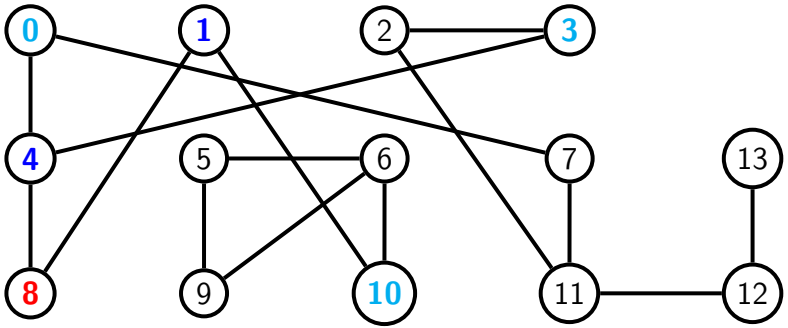
Principe : on part d'un sommet ; on cherche les voisins



Existence d'un chemin entre deux sommets

Recherche d'un chemin de 8 à 5

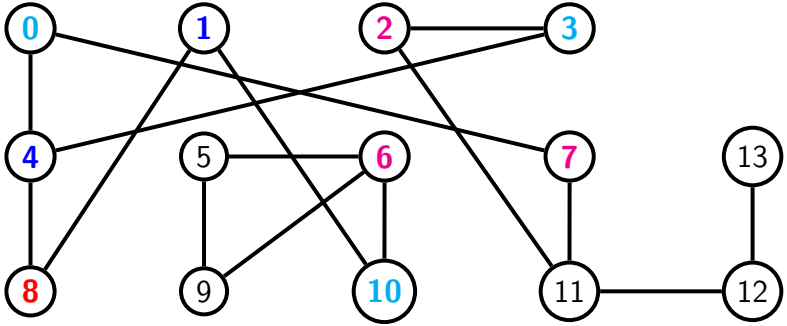
Principe : on part d'un sommet ; on cherche les voisins, puis les voisins des voisins (non encore atteints)



Existence d'un chemin entre deux sommets

Recherche d'un chemin de 8 à 5

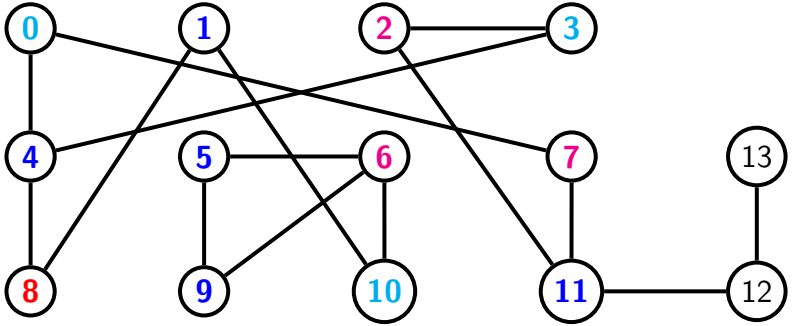
Principe : on part d'un sommet ; on cherche les voisins, puis les voisins des voisins (non encore atteints) , etc.



Existence d'un chemin entre deux sommets

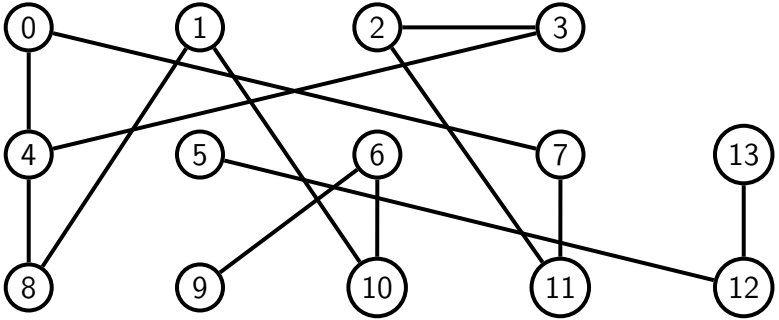
Recherche d'un chemin de 8 à 5

Principe : on part d'un sommet ; on cherche les voisins, puis les voisins des voisins (non encore atteints) , etc. jusqu'à ce que l'on tombe sur l'autre sommet.



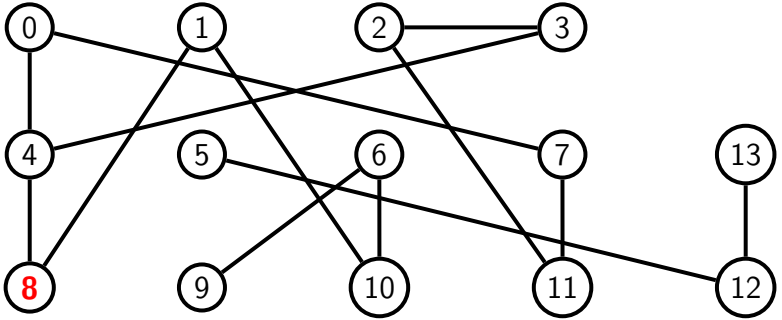
Existence d'un chemin entre deux sommets

Recherche d'un chemin de 8 à 5 (deuxième cas)



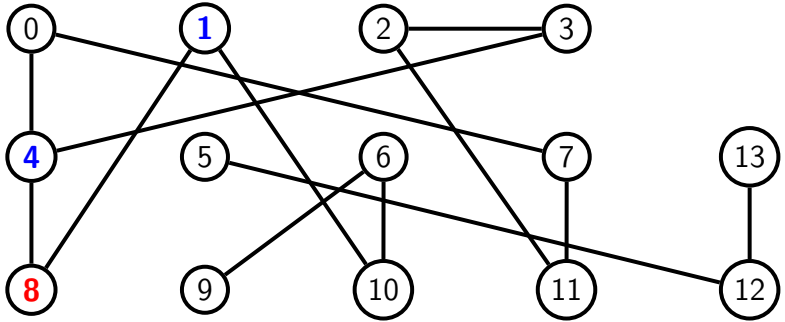
Existence d'un chemin entre deux sommets

Recherche d'un chemin de 8 à 5 (deuxième cas)



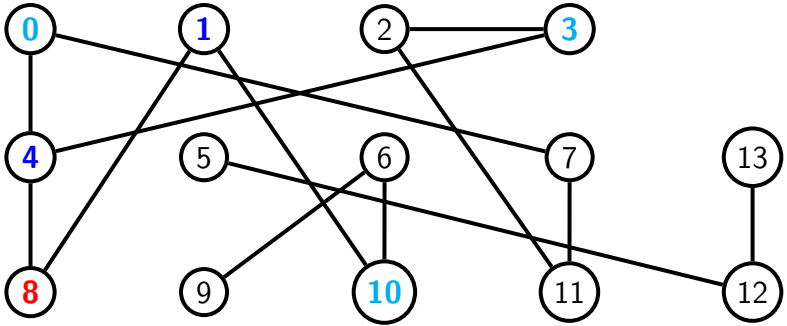
Existence d'un chemin entre deux sommets

Recherche d'un chemin de 8 à 5 (deuxième cas)



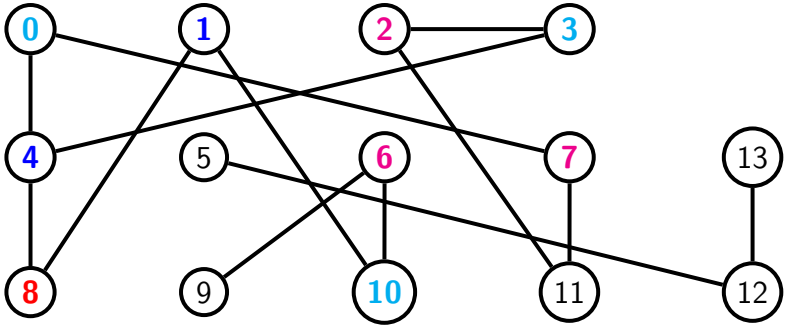
Existence d'un chemin entre deux sommets

Recherche d'un chemin de 8 à 5 (deuxième cas)



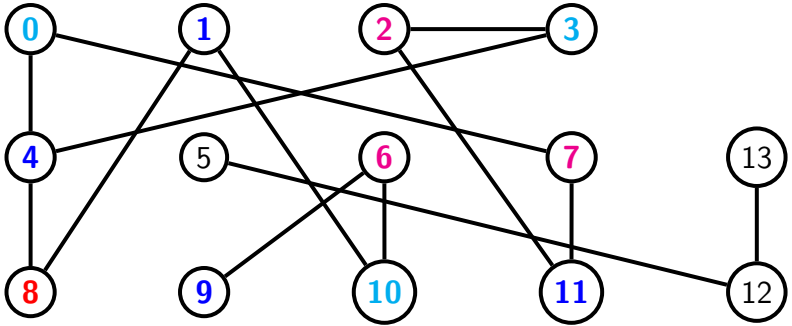
Existence d'un chemin entre deux sommets

Recherche d'un chemin de 8 à 5 (deuxième cas)



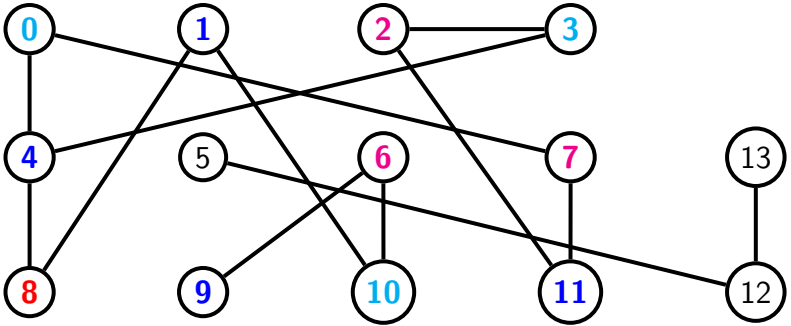
Existence d'un chemin entre deux sommets

Recherche d'un chemin de 8 à 5 (deuxième cas)



Existence d'un chemin entre deux sommets

Recherche d'un chemin de 8 à 5 (deuxième cas)

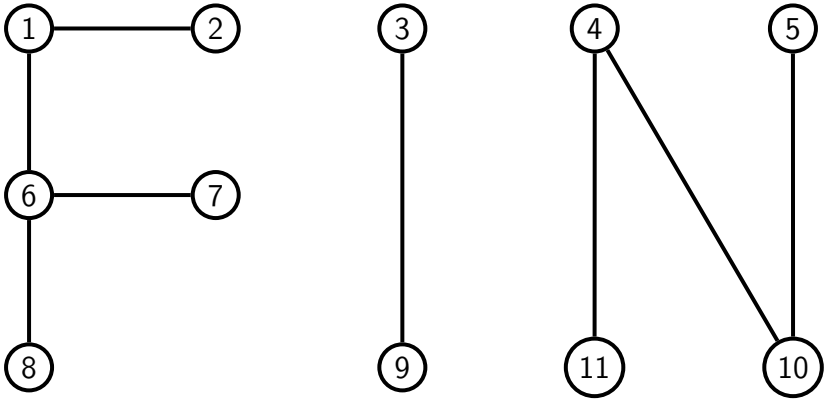


La liste des voisins n'augmente plus, sans avoir atteint le sommet 5.

Existence d'un chemin entre deux sommets

```
1  def existeChemin(Gr,s1,s2):
2      L=[] #ancienne liste des voisins
3      LV=[s1] #liste des voisins mise à jour
4      while L!=LV and s2 not in L:
5          L=LV[:]  #vraie copie de liste
6          for x in L:
7              for y in Gr.keys():
8              #graphe codé par un dictionnaire
9                  if y in Gr[x] and y not in LV:
10                     LV.append(y) #pas de doublon
11     return s2 in LV
```

Conclusion



Existence d'un chemin : un algorithme moins glouton

```
1  def existeChemin(Gr,s1,s2):
2      L=[s1] #sommets atteints à l'itération précédente
3      LV=[s1] #sommets atteints pendant l'itération
4      while LV!=[] and s2 not in LV:
5          LN=[] #liste des nouveaux voisins
6          for x in LV:
7              for y in Gr[x]:
8                  if not (y in L or y in LV or y in LN):
9                  #pas de recul, de sur place, ni de doublon
10                     LN.append(y)
11         L,LV=LV,LN
12     return s2 in LV
```