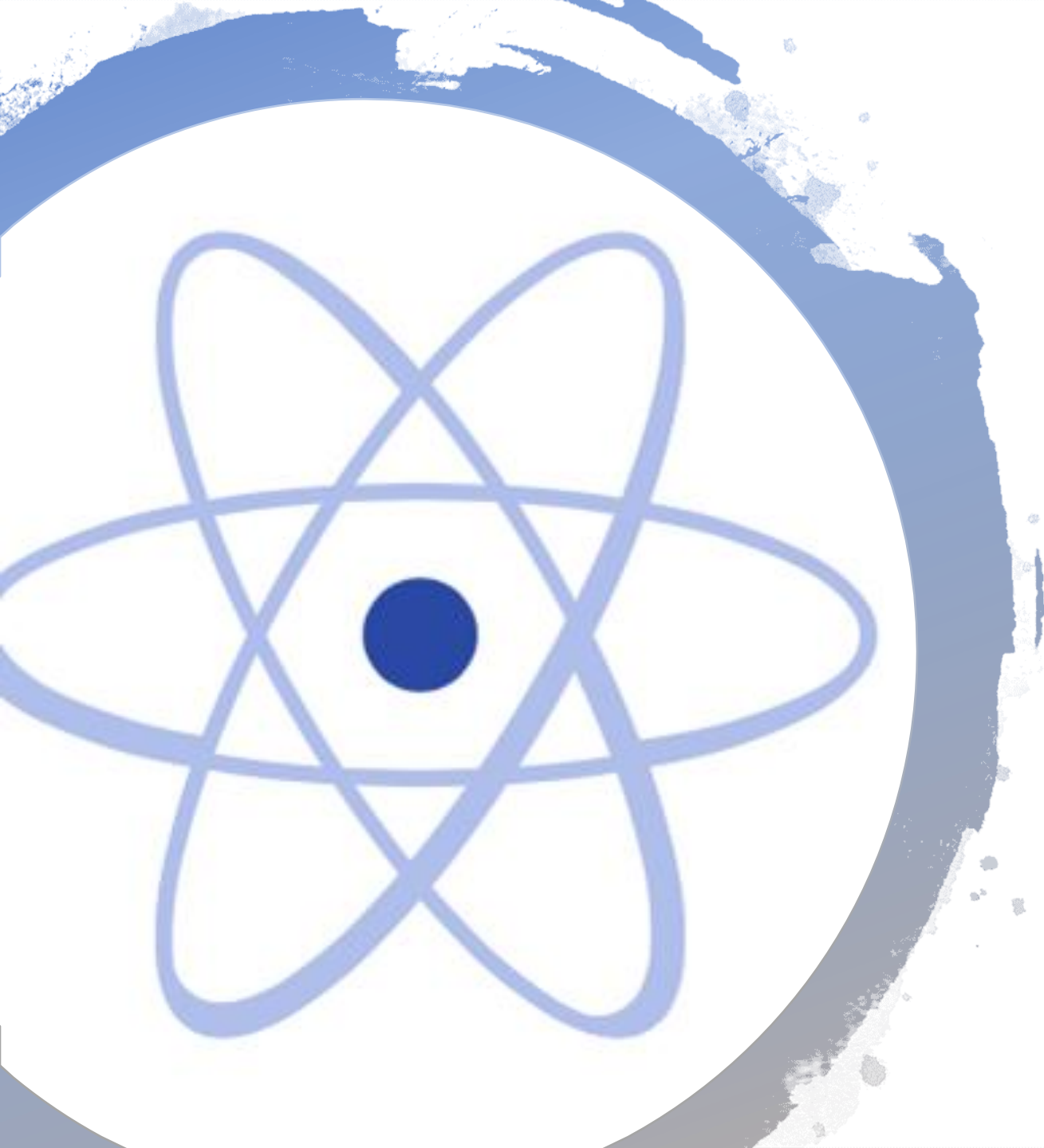




# PHYSIQUE-CHIMIE

Terminale

Enseignement de spécialité

Évolution de la  
température d'un  
système au contact  
d'un thermostat



## Objectifs

Déterminer l'évolution au cours du temps de la température de la tasse de café (système étudié) au contact de l'air ambient (thermostat).

- Approche expérimentale
- Approche de modélisation





## Objectifs de formation de la séance

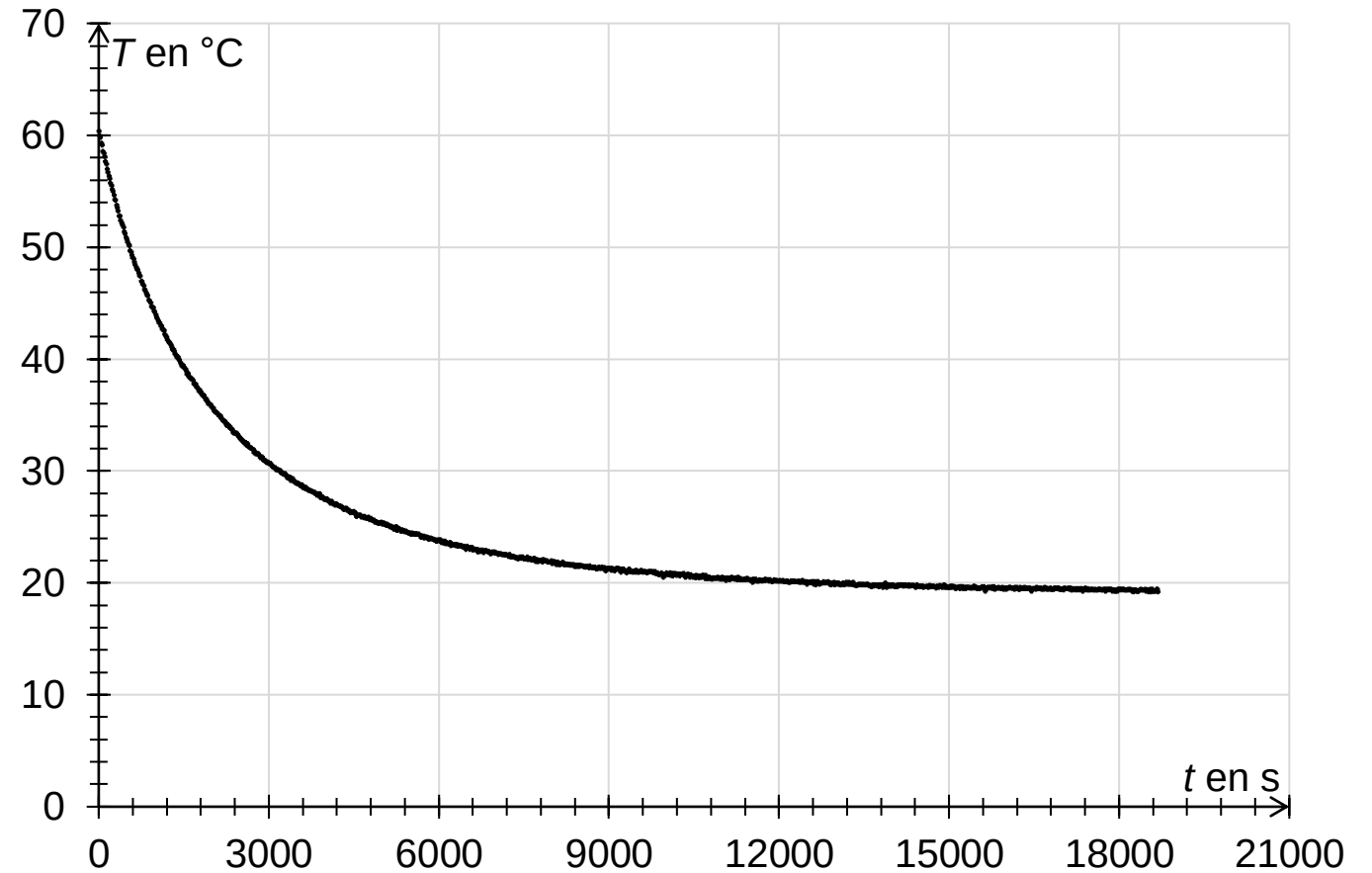
- *Principales capacités développées :*
  - *Suivre et modéliser l'évolution de la température d'un système incompressible*
  - *Effectuer un bilan d'énergie sur un système*
  - *Établir l'expression de la température du système en fonction du temps*
- *Notions mobilisées :*
  - *Énergie interne d'un système*
  - *Premier principe de la thermodynamique*
  - *Flux thermique modélisé par la loi phénoménologique de Newton*



# Approche expérimentale



Approche expérimentale: suivi du refroidissement au cours du temps d'une tasse de café (système étudié) au contact de l'air (thermostat) d'une pièce

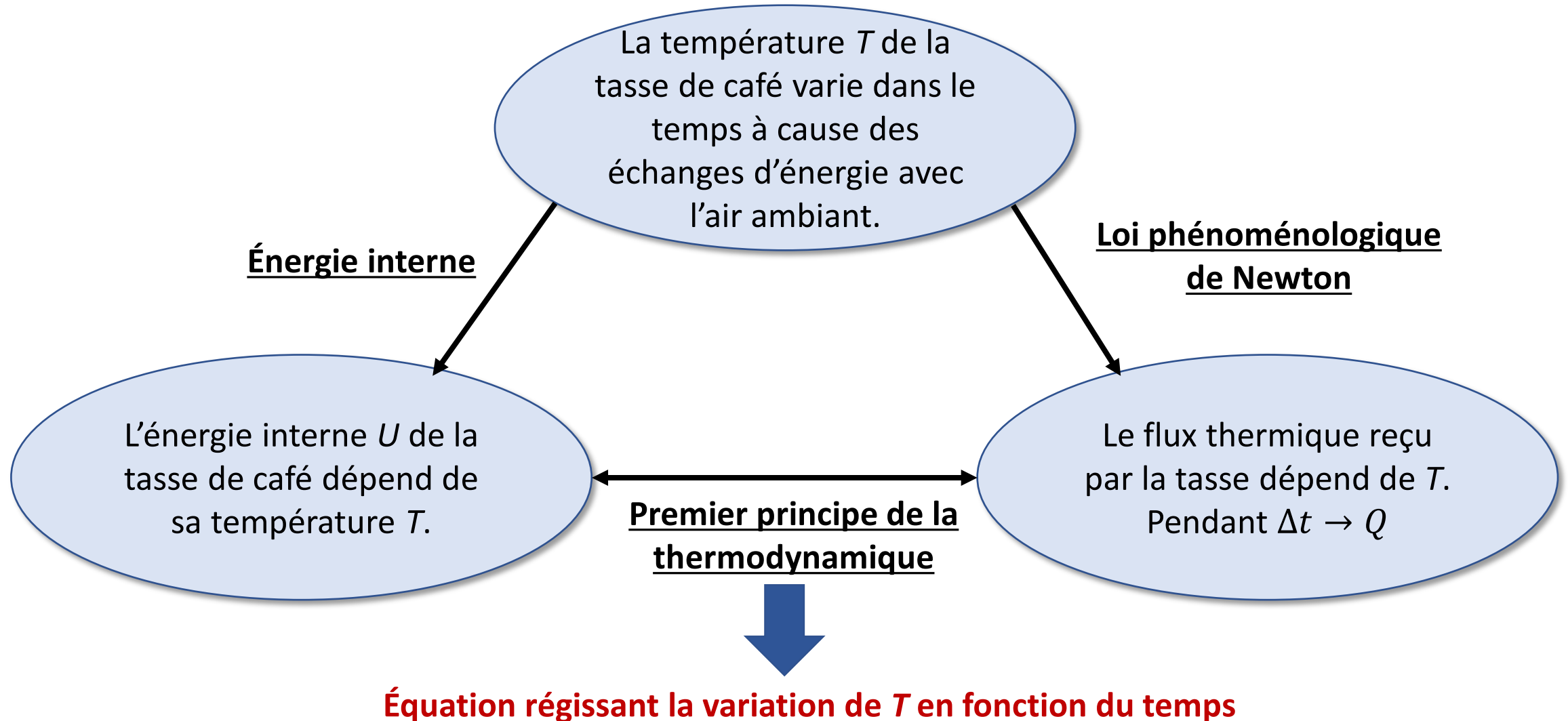




# Approche de modélisation

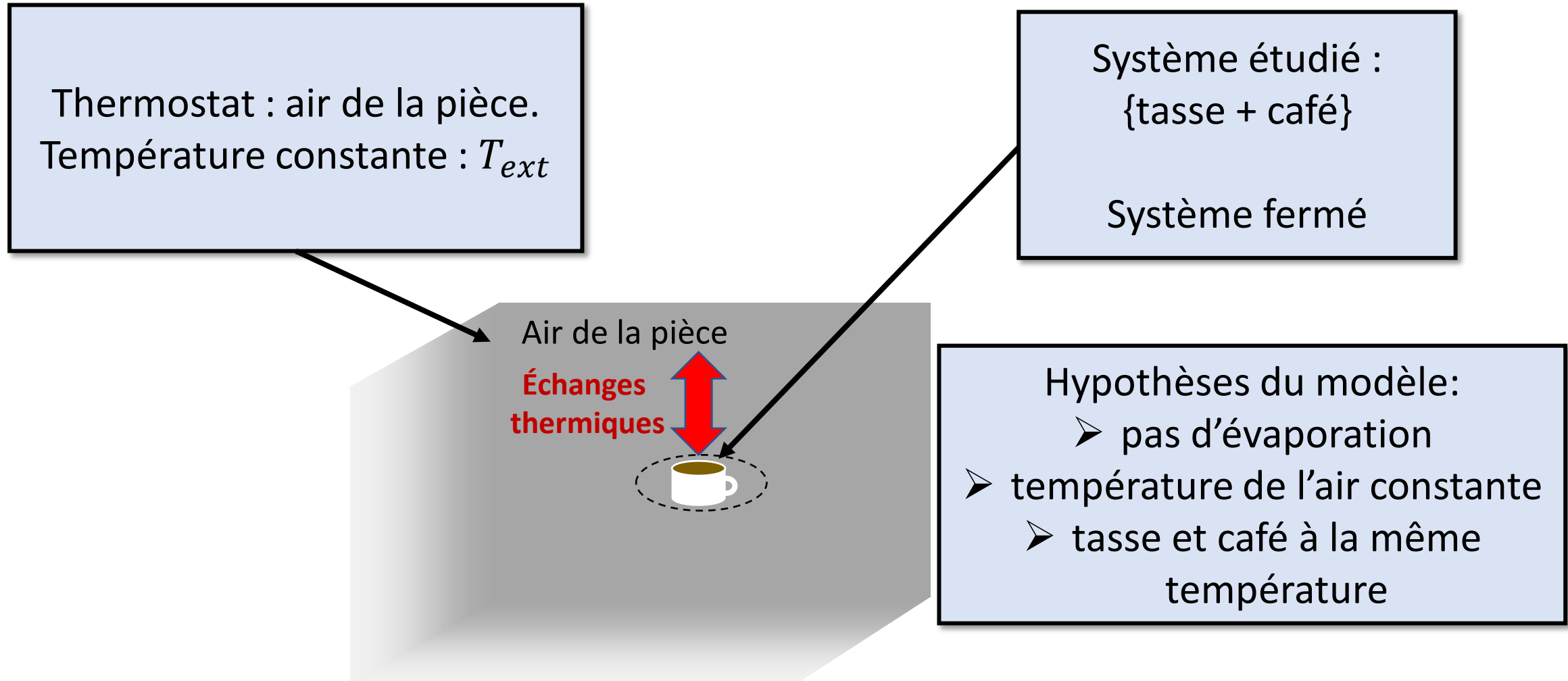


## Démarche de la modélisation





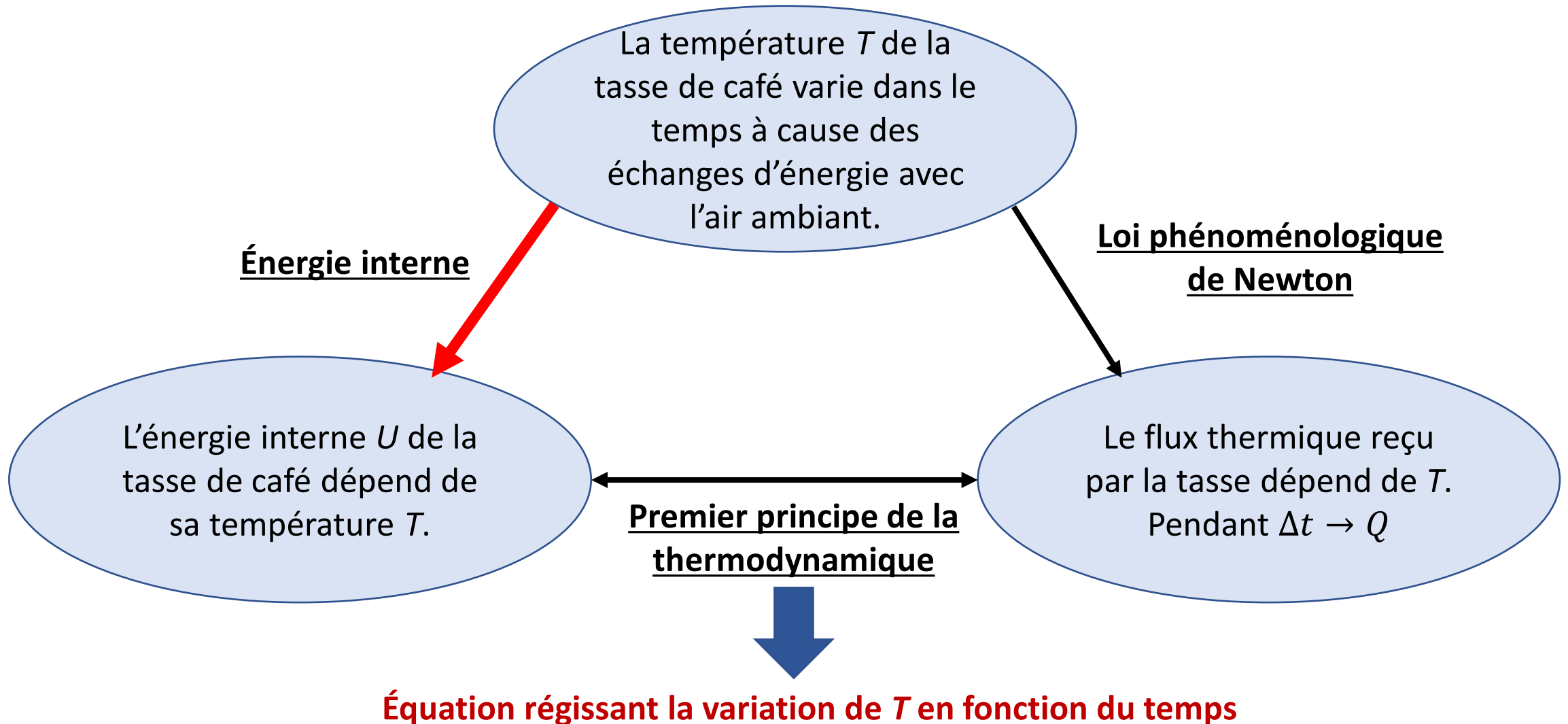
## Modélisation : le système étudié et le thermostat







## Modélisation : l'énergie interne du système étudié





## Modélisation : rappels sur l'énergie interne et sur la capacité thermique d'un système incompressible

- Système incompressible (solides, liquides) → volume constant
- Lien entre variation d'énergie interne et variation de température pour un système incompressible:

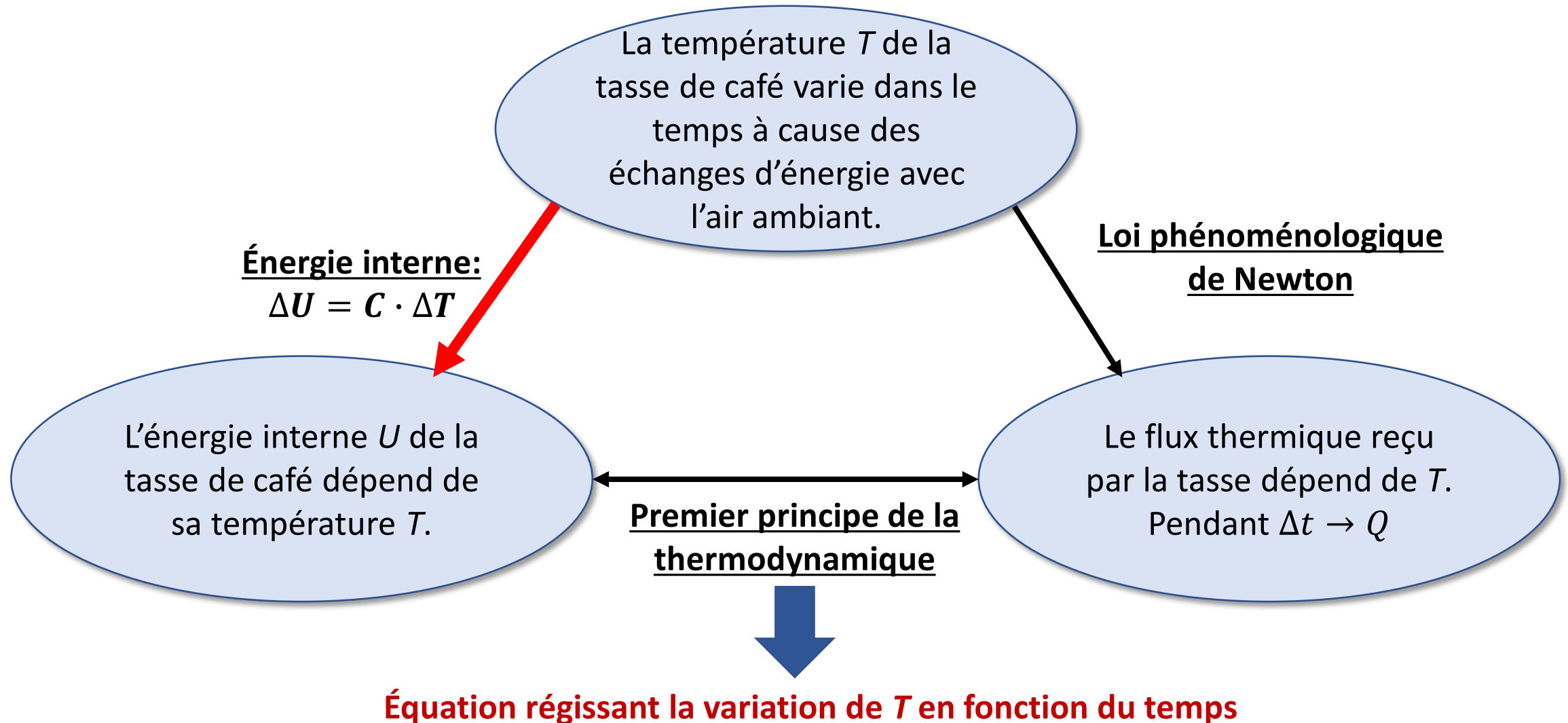
$$\Delta U = C \cdot \Delta T$$

où  $C$  est la capacité thermique du système en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

- Interprétation physique de la capacité thermique.
- Les facteurs d'influence sur la capacité thermique  $C$ :
  - nature
  - masse

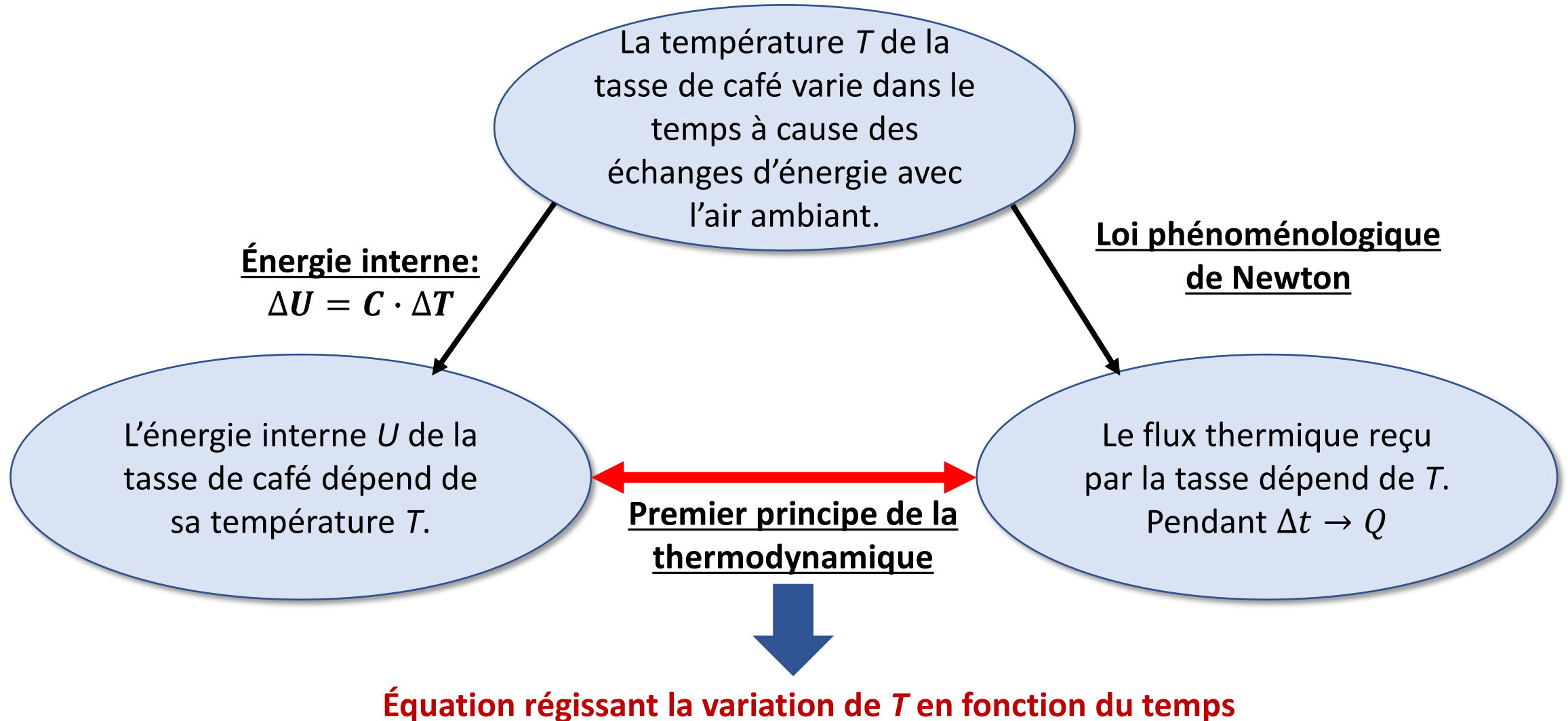


## Modélisation : l'énergie interne du système étudié





## Modélisation : bilan d'énergie, premier principe de la thermodynamique appliqué au système étudié





## Modélisation : Rappels sur le premier principe de la thermodynamique, bilan d'énergie

- L'énergie est une grandeur conservative.
- La variation d'énergie interne d'un système fermé entre un état initial et un état final est égale à l'énergie qu'il a reçue entre ces 2 états sous forme de travail et sous forme de transfert thermique:

$$\Delta U = W + Q$$

- $W$  : travail algébrique des forces extérieures reçu par le système, en J.
- $Q$  : transfert thermique algébrique reçu par le système, en J.



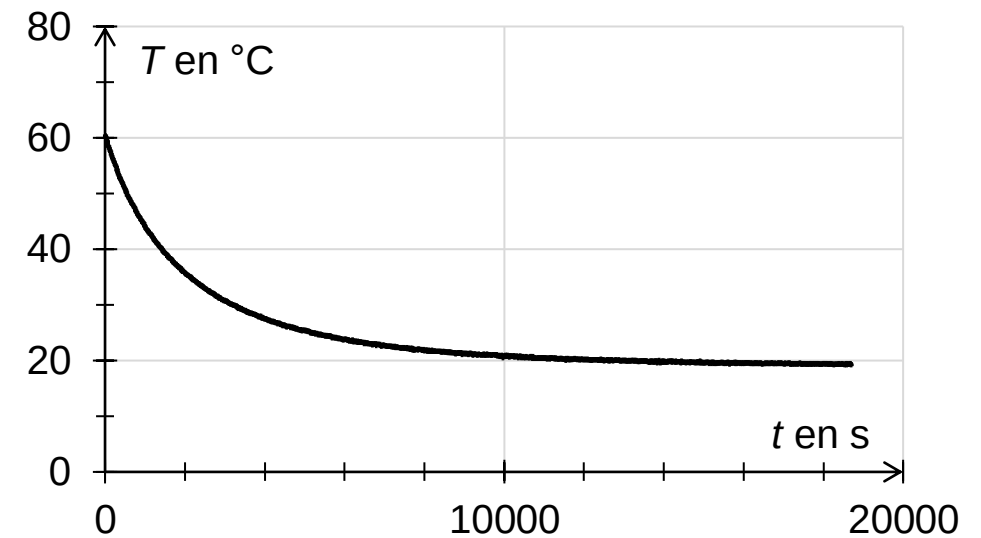
# Modélisation : premier principe de la thermodynamique appliqué au système étudié

## Modélisation :

- Premier principe de la thermodynamique appliqué au système étudié entre le début et la fin de l'expérience :

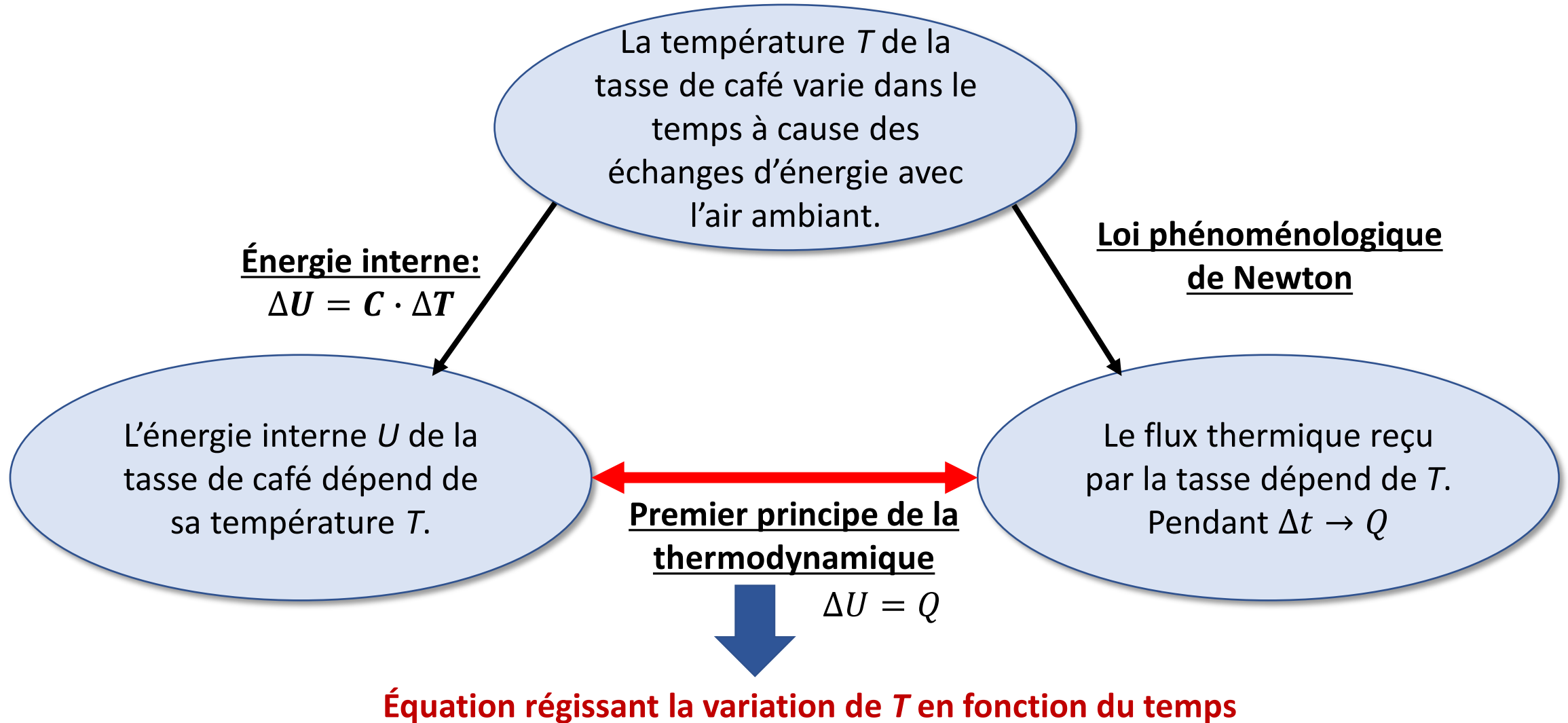
$$\Delta U = Q$$

- $\Delta U = C \cdot \Delta T$  avec  $\Delta T < 0$ .
- $\Delta U < 0$  donc  $Q < 0$ .



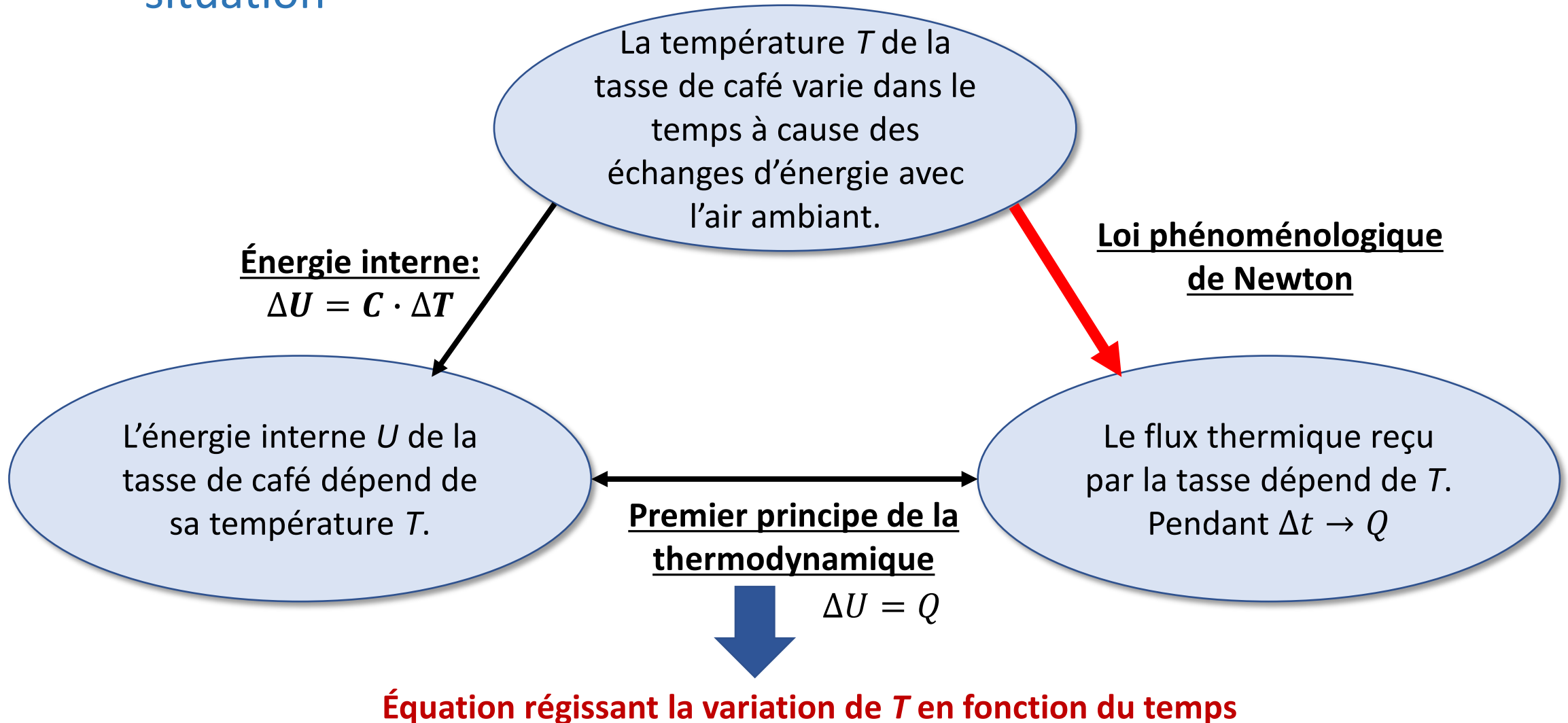


## Modélisation : bilan d'énergie, premier principe de la thermodynamique appliqué au système étudié





# Modélisation : la loi phénoménologique de Newton appliquée à la situation







## Modélisation : cadre et énoncé de la loi phénoménologique de Newton

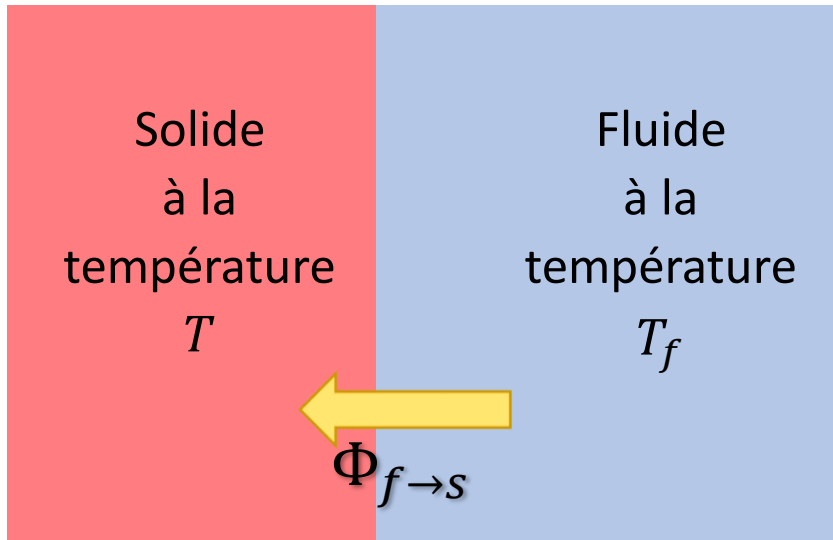
- Loi phénoménologique de Newton :

$$\Phi_{f \rightarrow s} = h \cdot S \cdot (T_f - T)$$

$S$  : aire de l'interface solide/fluide, en  $\text{m}^2$ .

$h$  : coefficient d'échange, en  $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ . (cst,  $> 0$ )

$\Phi$  : flux thermique algébrique à l'interface entre un solide et un fluide (liquide ou gaz)



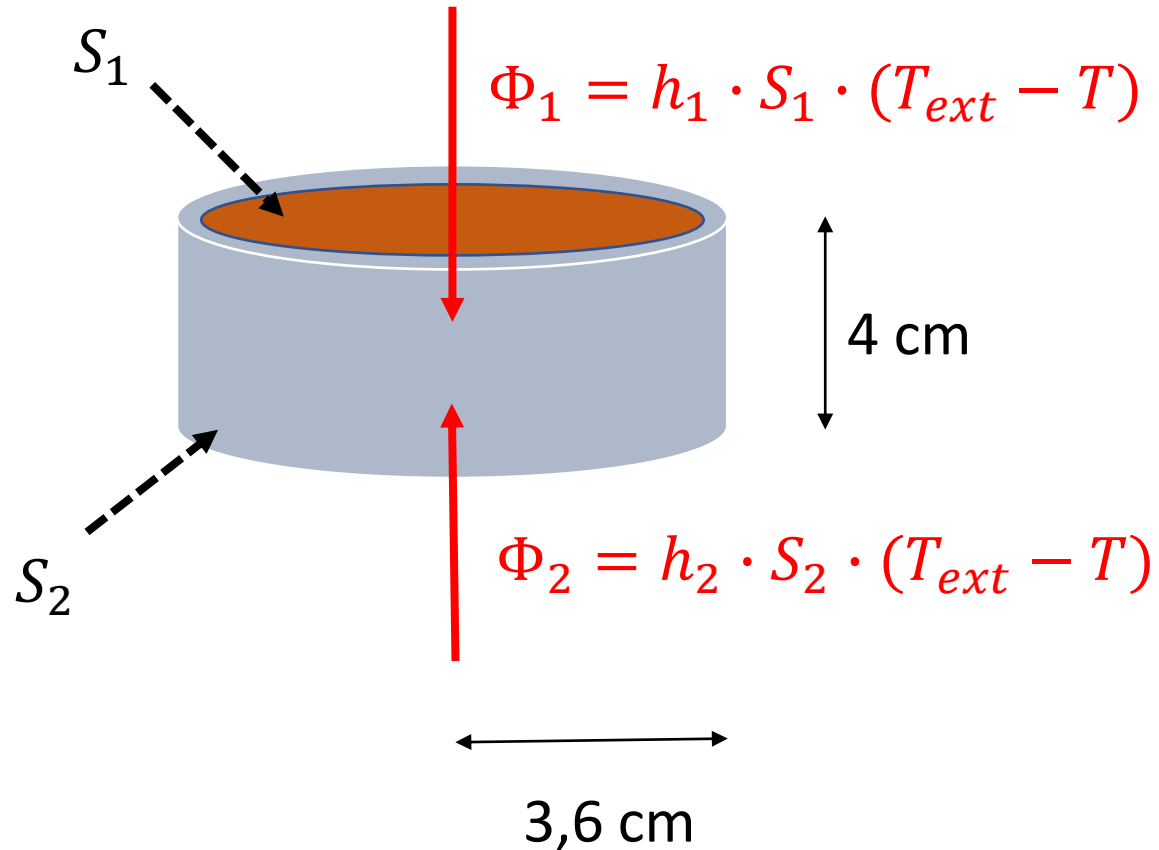


## Modélisation : cadre et énoncé de la loi phénoménologique de Newton

- Les facteurs d'influence de  $h$  :
  - nature du fluide
  - mouvement du fluide au voisinage de l'interface (convection)
- Ordre de grandeur de  $h$  en  $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  :
  - entre environ  $5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  et  $25 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  quand le fluide est de l'air convection libre
  - entre environ  $10 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  et  $500 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  quand le fluide est de l'air convection forcée



## Modélisation : la loi phénoménologique de Newton appliquée à la situation



### Refroidissement de la tasse de café :

- flux thermique reçu par le système :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

- d'où

$$\Phi = \frac{T_{ext} - T}{R_{th}}$$

Avec  $R_{th}$  la résistance thermique équivalente, en  $K \cdot W^{-1}$ .

- $\Phi < 0$ .



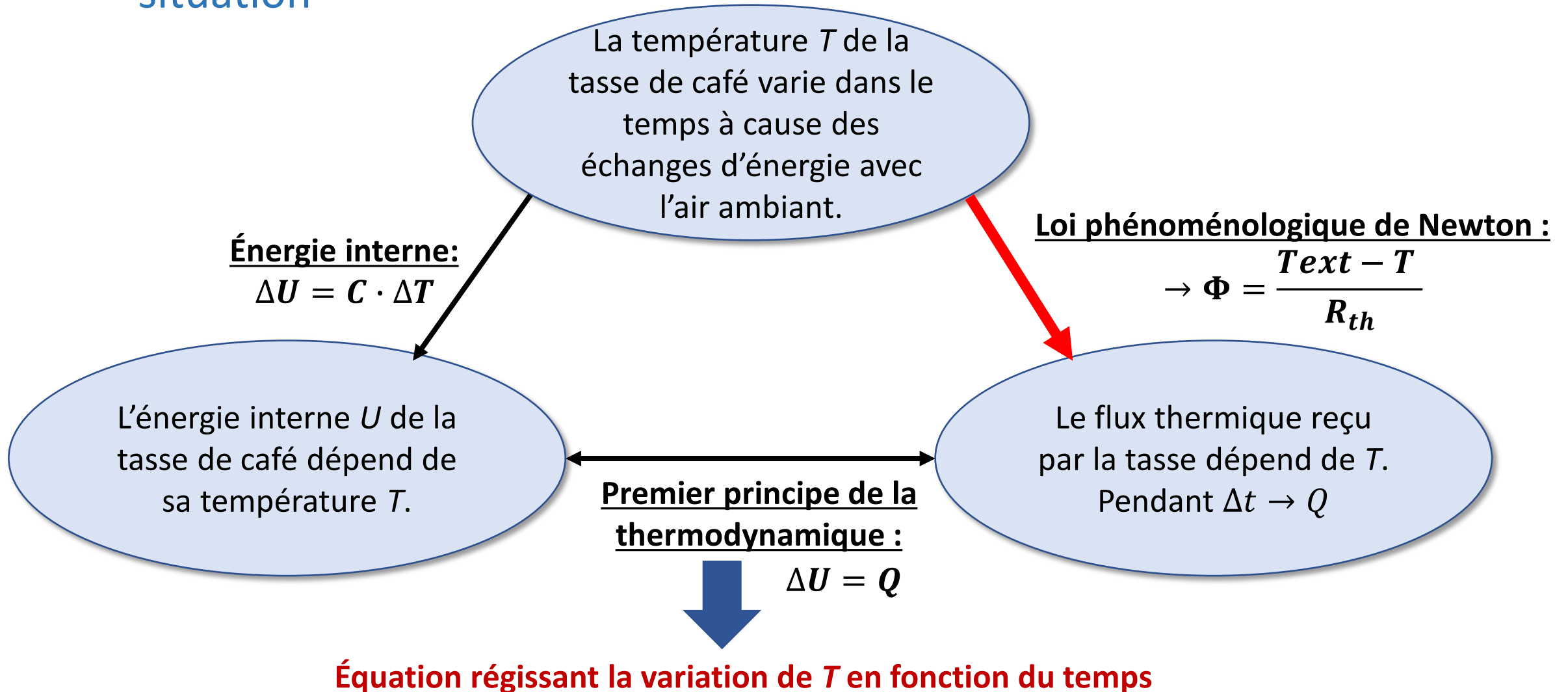
## Un petit exercice

- Exercice :
  - Montrer que :

$$R_{th} = \frac{1}{h_1 \cdot S_1 + h_2 \cdot S_2}$$

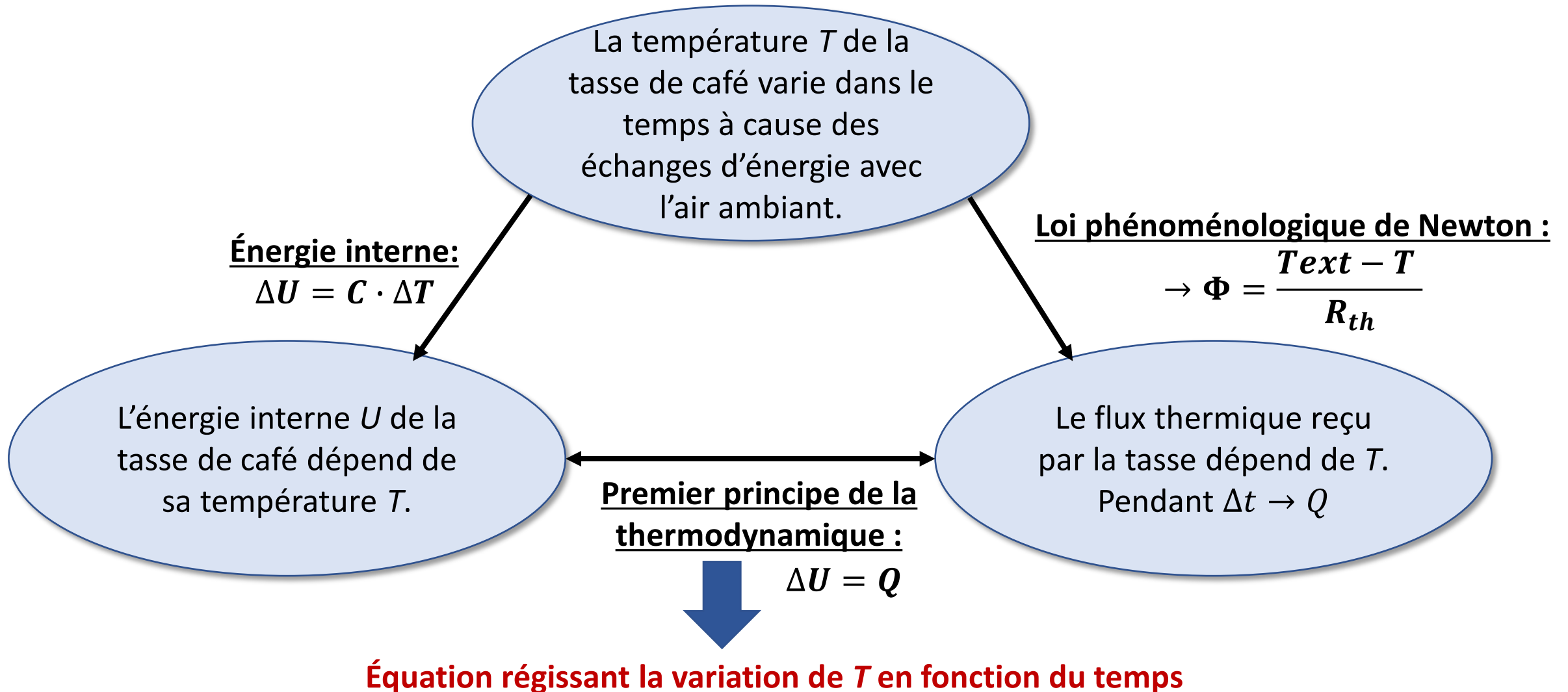


# Modélisation : la loi phénoménologique de Newton appliquée à la situation





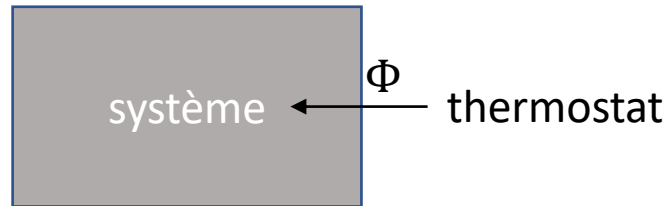
## Modélisation : retour sur la démarche





## Modélisation : mise en équation de $T(t)$

- Schéma :



- $\Delta U = C \cdot \Delta T$

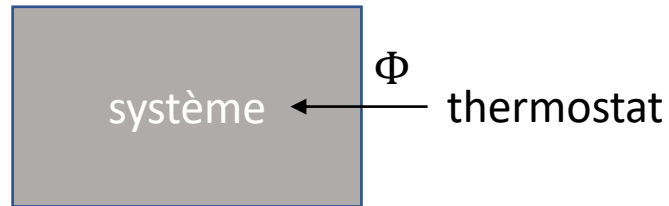
- $\Phi = \frac{T_{ext} - T}{R_{th}}$

Premier principe de la thermodynamique appliqué au système étudié entre un instant  $t$  et un instant  $t + \Delta t$  :



## Modélisation : analyse de l'équation différentielle obtenue

- Schéma :



- $C \cdot R_{th} \cdot \frac{dT}{dt} + T = T_{ext}$
- $\frac{dT}{dt} = \frac{T_{ext} - T}{C \cdot R_{th}}$

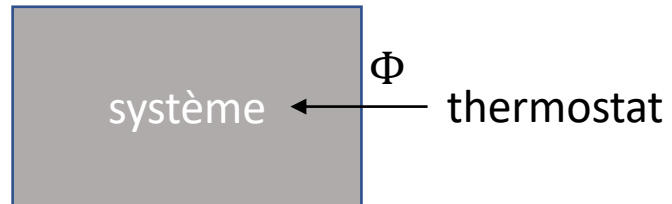
- C'est une équation différentielle.
- Durant toute l'expérience :  $T > T_{ext}$ , donc  $T$  diminue dans le temps.
- Au début,  $T - T_{ext}$  est maximale. Diminution rapide de  $T$ .
- Quand la température se stabilise :  $T = T_{ext}$  donc  $\frac{dT}{dt} = 0$ . Équilibre thermique entre le système étudié et le thermostat est atteint.
- $C \cdot R_{th}$  est homogène à un temps.





## Modélisation : résolution de l'équation différentielle obtenue

- Schéma :



- $C \cdot R_{th} \cdot \frac{dT}{dt} + T = T_{ext}$

- Initialement :

$$T(t = 0) = T_0$$

- Forme de la solution :

$$T(t) = A + B \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

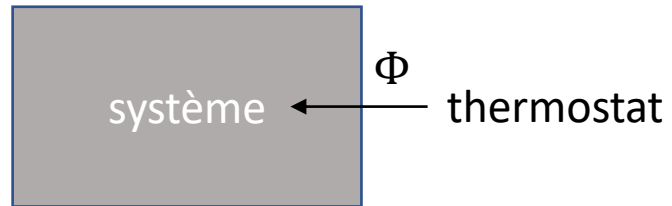
- Expression de  $\frac{dT}{dt}$  :

- Dans l'équation différentielle obtenue:



## Modélisation : résolution de l'équation différentielle obtenue

- Schéma :



- $C \cdot R_{th} \cdot \frac{dT}{dt} + T = T_{ext}$

- Initialement :

$$T(t = 0) = T_0$$

- Forme de la solution :

$$T(t) = A + B \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot \left(1 - \frac{C \cdot R_{th}}{\tau}\right) \cdot B = T_{ext} - A$$



## Modélisation : résolution de l'équation différentielle obtenue

- Équation :

$$C \cdot R_{th} \cdot \frac{dT}{dt} + T = T_{ext}$$

- Initialement :  $T(t = 0) = T_0$
- Forme des solutions

$$T(t) = A + B \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Avec :

- $A = T_{ext}$
- $B = (T_0 - T_{ext})$

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot \left(1 - \frac{C \cdot R_{th}}{\tau}\right) \cdot B = T_{ext} - A$$



## Modélisation : étude de la solution $T(t)$ de l'équation différentielle

- Équation :

$$C \cdot R_{th} \cdot \frac{dT}{dt} + T = T_{ext}$$

- Initialement :  $T(t = 0) = T_0$
- Forme des solutions :

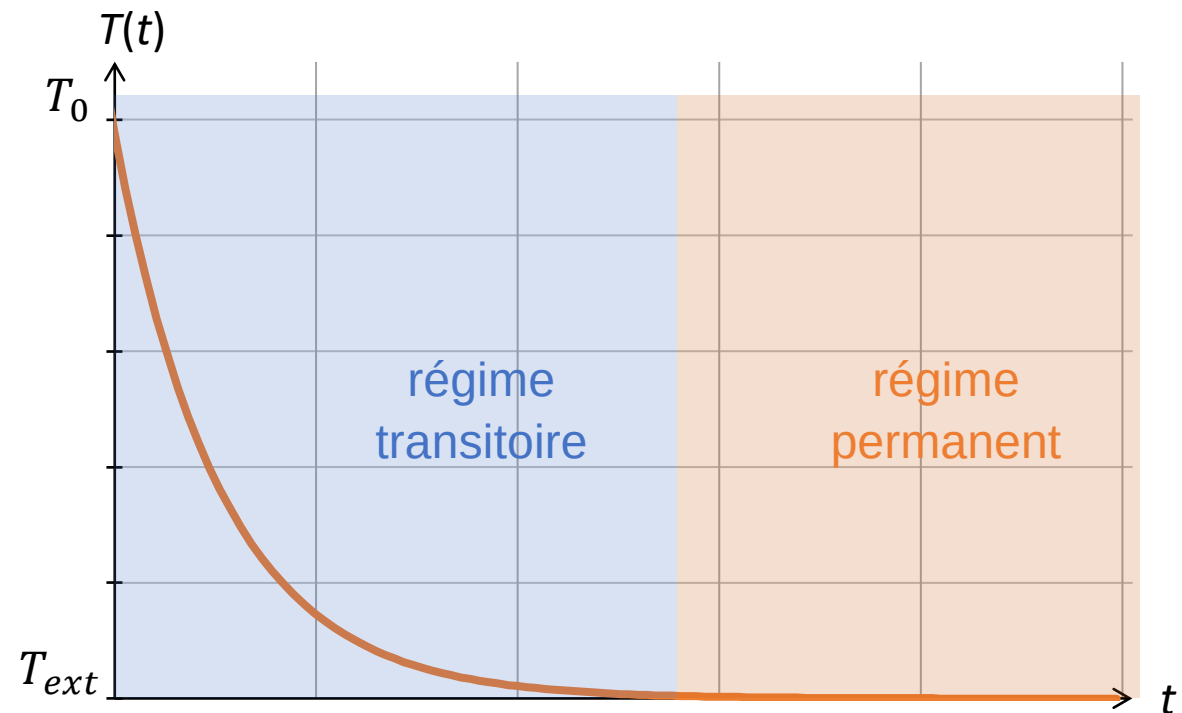
$$T(t) = A + B \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Avec :

- $\tau = C \cdot R_{th}$
- $A = T_{ext}$
- $B = (T_0 - T_{ext})$

Solution de l'équation :

$$T(t) = T_{ext} + (T_0 - T_{ext}) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$





## Modélisation : étude de la solution $T(t)$ de l'équation différentielle

- Après une durée de  $\tau$  :

$$T(\tau) = T_{ext} + (T_0 - T_{ext}) \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{\tau}\right)$$

$$T(\tau) - T_{ext} = (T_0 - T_{ext}) \cdot \exp(-1)$$

$$T(\tau) - T_{ext} = (T_0 - T_{ext}) \cdot 0,37$$

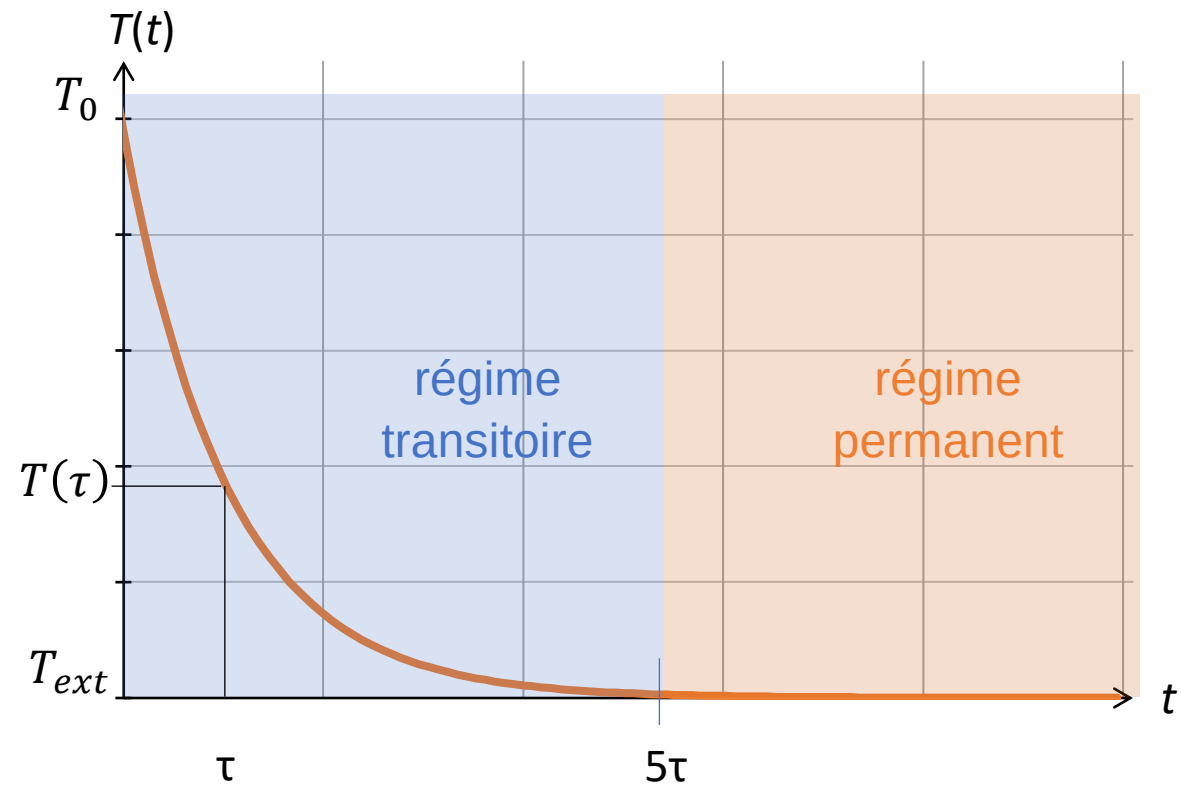
- Durée caractéristique d'évolution de la température :  $\tau$

- Après une durée de  $5\tau$  :

$$T(5\tau) = T_{ext} + (T_0 - T_{ext}) \cdot \exp(-5)$$

$$T(5\tau) - T_{ext} = (T_0 - T_{ext}) \cdot 0,007$$

- Ordre de grandeur de la durée du régime transitoire :  $5\tau$





## Modélisation : temps caractéristique $\tau$

- $\Delta U = C \cdot \Delta T$
- $\Phi = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th}}$

- $\tau = C \cdot R_{th}$

→  $\tau$  est bien homogène à un temps.

- Les facteurs d'influence sur  $\tau$ .



# Confrontation entre la modélisation et l'approche expérimentale



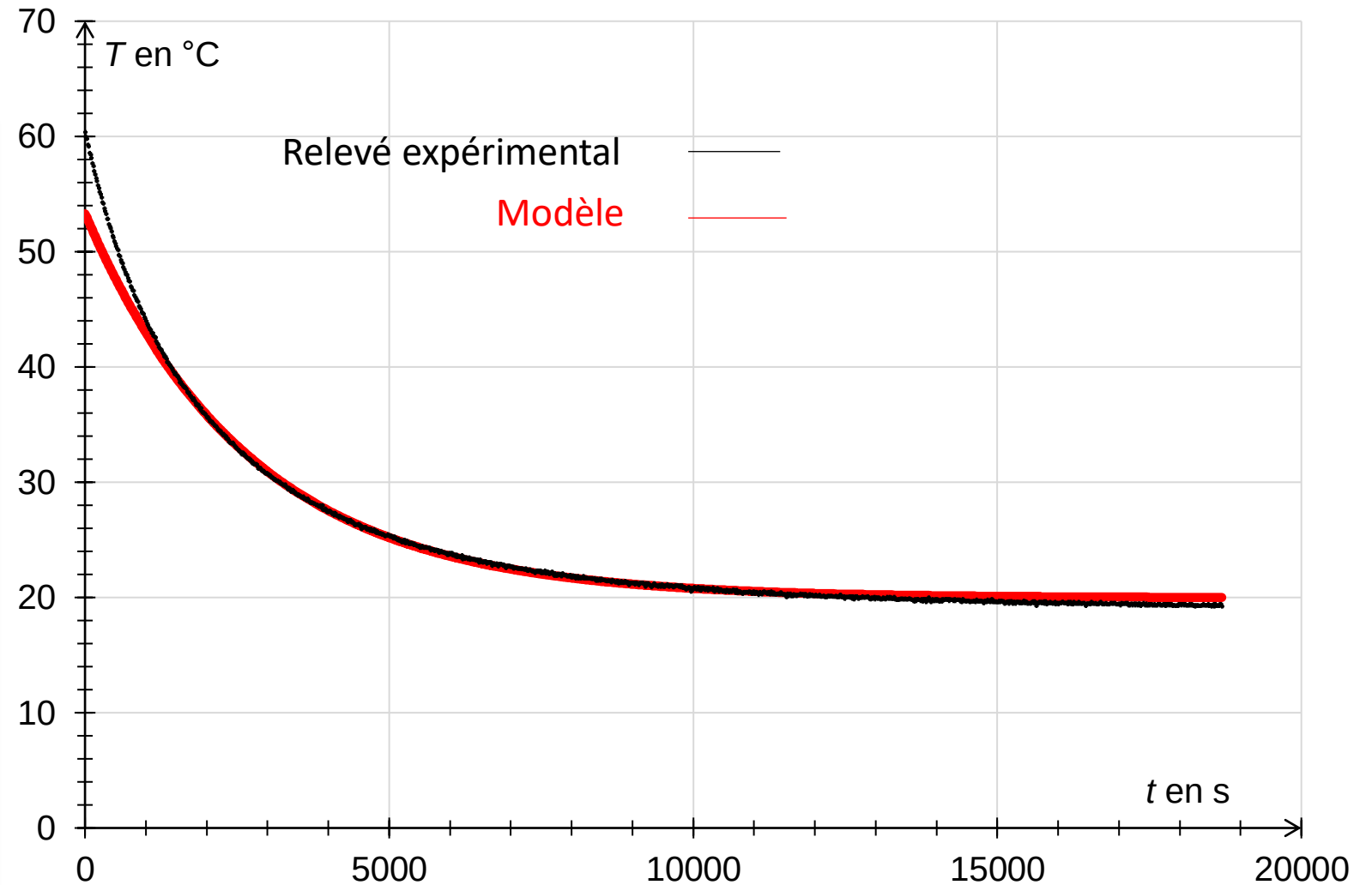
## Exploitation des résultats et validation du modèle

- Ajustement par le modèle.
- Modèle vérifié entre  $t = 20$  min et  $t = 3$  h 30 min.
- L'ajustement entre ces instants donne :

$$\tau = 2700 \text{ s} \approx 45 \text{ min}$$

$$\text{Or } C = 753 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\rightarrow R_{th} = \frac{\tau}{C} = 3,6 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$





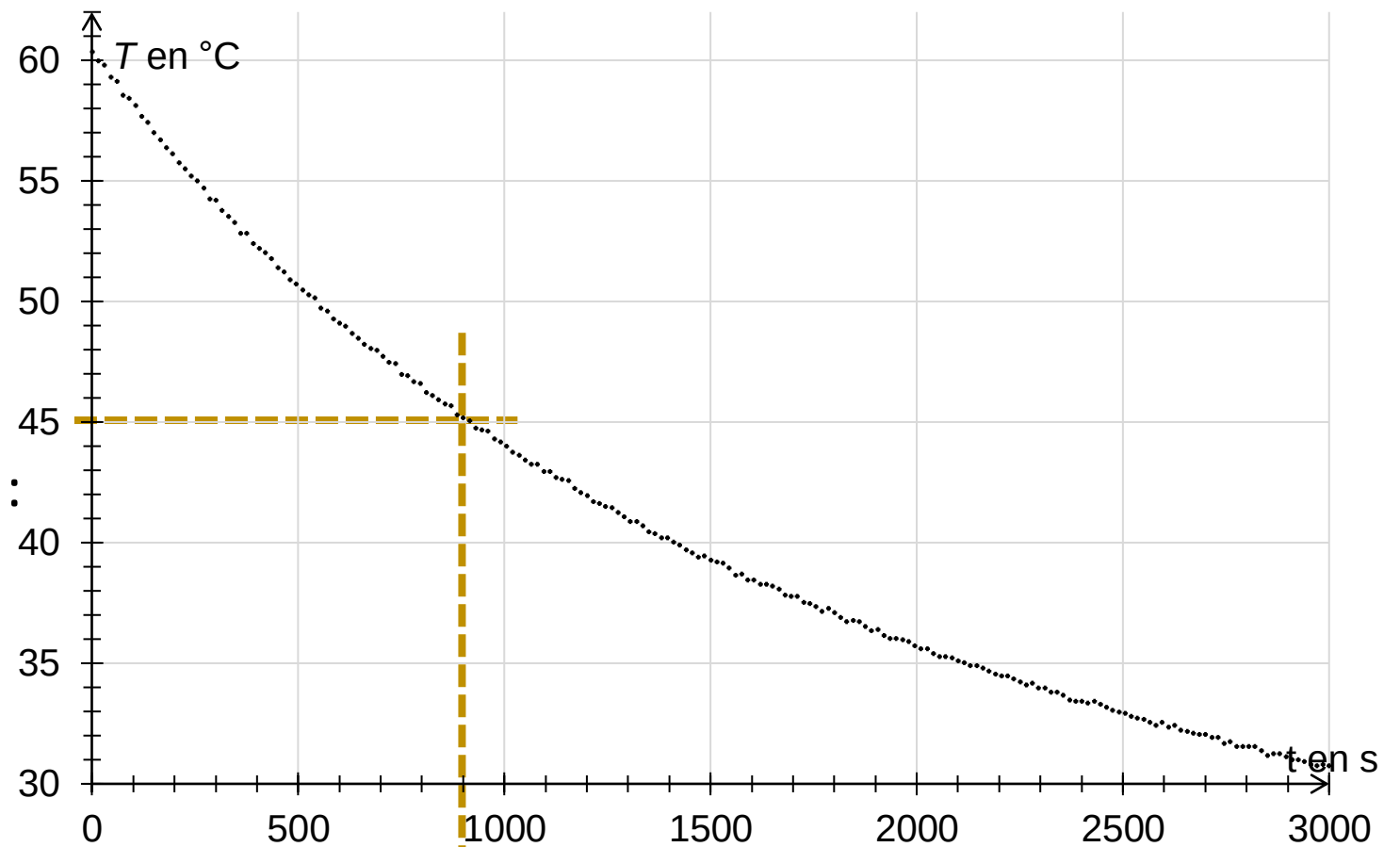


# Conclusion et bilan



## Conclusion

- Réponse au problème : Combien de temps attendre pour boire son café dans ces conditions ?
- Pour un café que l'on voudrait boire à la température idéale  $T = 45^{\circ}\text{C}$  à partir d'un café servi initialement à une température  $T = 60^{\circ}\text{C}$  :
  - 900 s soit 15 min



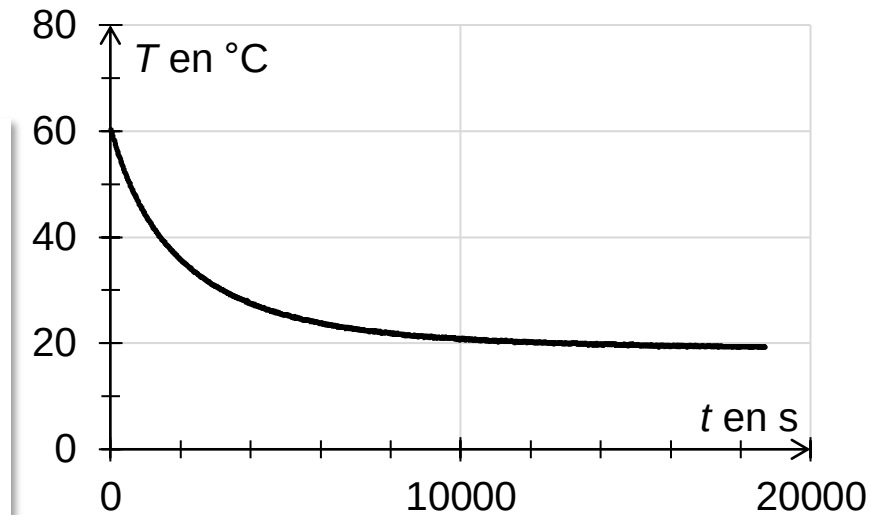


## Bilan : modélisation de l'évolution de la température d'un système au contact d'un thermostat

- Modélisation par une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants.
- Évolution de la température dans le temps sous forme d'une exponentielle de temps caractéristique :

$$\tau = C \cdot R_{th}$$

- Modélisation analogue à celle de la charge ou de la décharge d'un condensateur.
- Convergence de la température du système vers celle du thermostat.
- Durée des phénomènes de variation de température.





## Vers d'autres situations en physique

- Autres problèmes pouvant être modélisés de manière analogue :
  - Évolution de la température d'une pièce dont on aurait coupé le chauffage.
  - Évolution de la température des aliments d'un réfrigérateur qui subirait une panne de courant.
  - Évolution de la température d'un microprocesseur après utilisation.





## Solution de l'exercice

Réponse exercice :

➤ Expression de  $R_{th}$ :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = (h_1 \cdot S_1 + h_2 \cdot S_2) \cdot (T_{ext} - T)$$

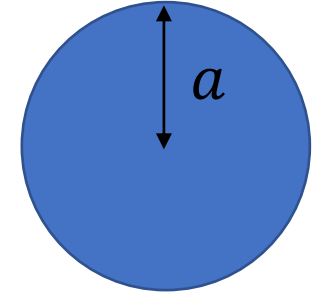
$$\text{Or } \Phi = \frac{T_{ext} - T}{R_{th}}$$

$$\text{d'où: } R_{th} = \frac{1}{h_1 \cdot S_1 + h_2 \cdot S_2}$$



## Quiz

- Boule homogène de rayon  $a$  et de température  $T(t)$
  - Capacité thermique :  $C$
  - Initialement à  $T(t = 0) = T_0$
  - En contact avec l'air ambiant (thermostat) à  $T_{ext}$ , avec  $T_{ext} < T_0$ .
  - Le flux thermique entre la boule et l'air modélisé par la loi phénoménologique de Newton.
  - Temps caractéristique de l'évolution de  $T(t)$  :  $\tau$
- Par quel facteur est multiplié  $\tau$  si on double le rayon de cette boule?





## Réponse quiz

- $\tau = C \cdot R_{th}$
- La boule est homogène, donc  $C$  est proportionnelle à son volume:  $\frac{4 \cdot \pi \cdot a^3}{3}$ .
  - Donc si on double  $a$ , on multiplie par 8 la capacité thermique.
- $R_{th} = \frac{1}{h \cdot S}$  avec  $S = 4 \cdot \pi \cdot a^2$  la surface de la boule.
  - Donc si on double  $a$ , on divise par 4 la résistance thermique.
- Finalelement, doubler le rayon de la boule revient à doubler le temps caractéristique de l'évolution temporelle de la température de cette boule.