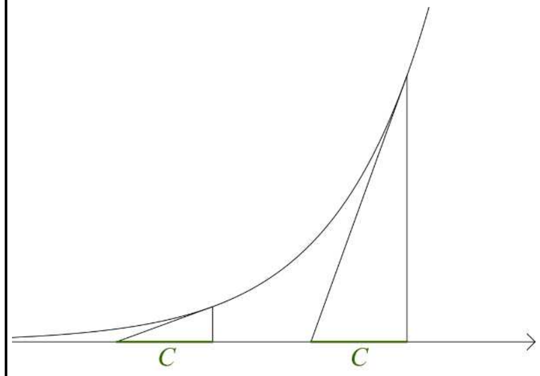
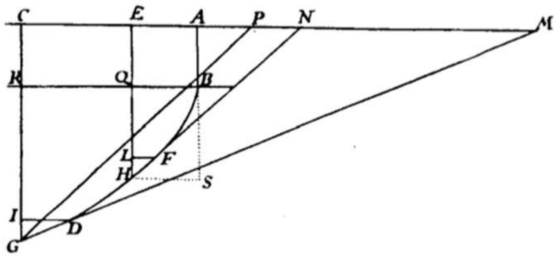
Primitives, équations différentielles



Problème de l'isochrone :
« Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descende uniformément, et approche également de l'horizon en temps égaux »



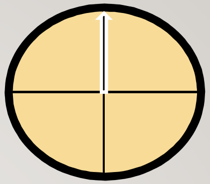
Problème de Florimond de Beaune
« Trouver une courbe telle qu'en tout point, la sous-tangente C soit constante »

$$\omega = \frac{a}{b}.d\omega.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2 y - a^3}}{\sqrt{a^3}}$$

QUESTIONS FLASH

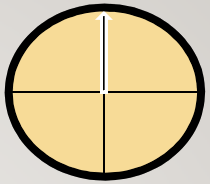
QUESTION 1



Déterminer une fonction F dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que

$$F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ , pour tout réel } x > 0$$

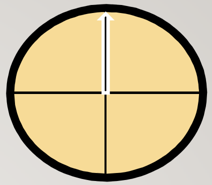
QUESTION 2



Déterminer une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$y'(x) = e^{x} + 5 \text{ , pour tout réel } x > 0$$

QUESTION 3



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-2x+3}$$

Cette fonction est la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction F définie par :

a. $F(x) = e^{-2x+3}$

b. $F(x) = -2e^{-2x+3}$

c. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$

d. $F(x) = 3e^{-2x+3}$

CORRECTION

QUESTION 1

Déterminer une fonction F dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que

$$F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ , pour tout réel } x > 0$$

QUESTION 2

Déterminer une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$y'(x) = e^x + 5 \quad \text{, pour tout réel } x > 0$$

QUESTION 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-2x+3}$$

Cette fonction est la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction F définie par :

a. $F(x) = e^{-2x+3}$

b. $F(x) = -2e^{-2x+3}$

c. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$

d. $F(x) = 3e^{-2x+3}$

Équation différentielle

Définition
Une équation différentielle est une égalité liant une fonction dérivable y à sa fonction dérivée y' (voire à ses fonctions dérivées y'', y''' ...) et éventuellement d'autres fonctions.
Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions dérivables vérifiant l'égalité.

Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' = y$

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' = -9y$

Équation différentielle $y' = f$

Définition
Soit f une fonction continue, définie sur un intervalle I
Une fonction F est une primitive de f sur I , lorsque pour tout réel $x \in I, F'(x) = f(x)$

Remarque
Une primitive de f sur I est solution de l'équation différentielle $y' = f$

- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

La fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 2020$
est une primitive de f sur $]0; +\infty[$

- La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = 2x^2 + 3x - e^x$ est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = 4x + 3 - e^x$.

Équation différentielle $y' = f$

Propriété
Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Les fonctions $F\ et\ G$ définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 + 2x\ \ et\ \ G(x) = x^2 + 2x - 3$ sont des primitives de la fonction f définie par $f(x) = 2x + 2$.

Primitives des fonctions de référence

Fonction f	Intervalle	Primitive
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^n$, $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$	
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n > 1$ entier	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	

Primitives des fonctions de référence

Propriété
Soit u définie et dérivable sur I et telle que, pour tout réel $x \in I, u(x) \in J$
Soit v définie et dérivable sur J
Alors $f = v \circ u$ est définie et dérivable sur I et, pour tout réel $x \in I, f'(x) = \left[v'\big(u(x)\big)\right] \times u'(x)$

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(3x)$.

Primitives de fonctions ayant des formes remarquables

Fonction de la forme	Primitive	Conditions
$f+g$	$F+G$	
kf	kF	
$u'e^u$	e^u	
$u' \times u^n$, $n > 1$ entier	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	Pour $u(x) > 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Pour $u(x) > 0$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$	
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	

Recherche d'une primitive de formes remarquables

- $f(x) = 4e^{4x+1} \quad sur\ \mathbb{R}$

- $g(x) = \dfrac{1}{x+1} \quad sur\ ]-1\,;+\infty[$

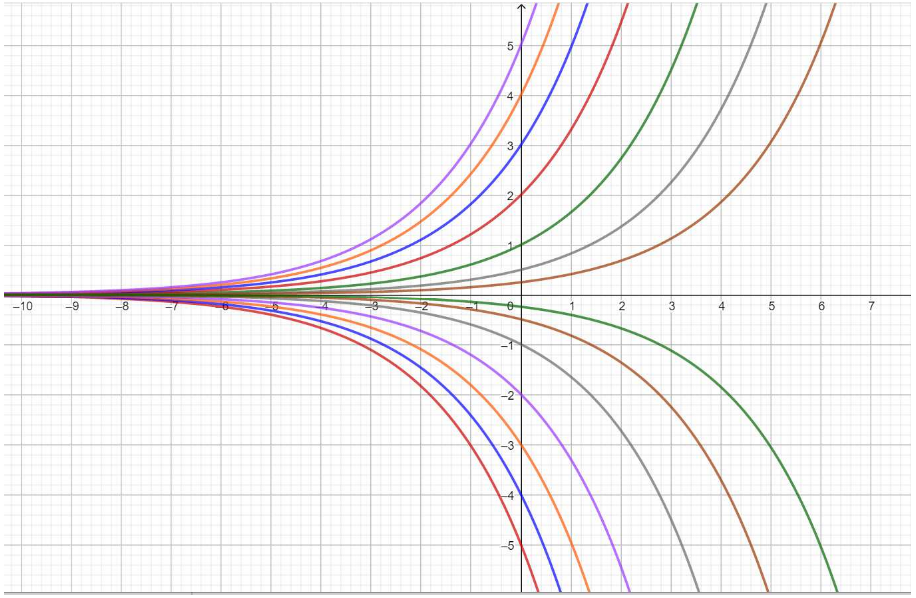
Équation différentielle $y' = ay$

Propriété
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ke^{ax}$, avec K réel.

Équation différentielle $y' = ay$

Propriété
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ke^{ax}$, avec K réel.

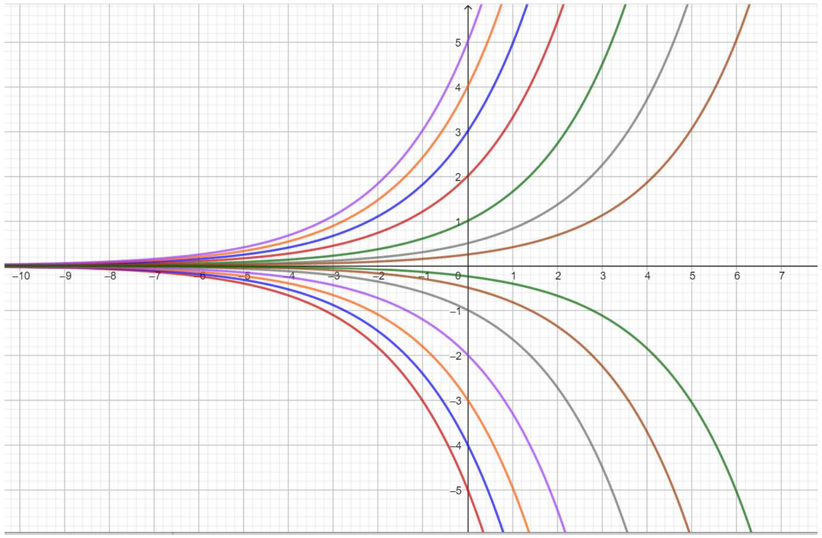
$$y' = \frac{1}{2}y$$
$$f(x) = Ke^{\frac{1}{2}x}$$



Équation différentielle $y' = ay$

$$y' = \frac{1}{2}x$$

$$f(x) = Ke^{\frac{1}{2}x}$$



Propriété
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ke^{ax}$, avec K réel.

Pour un couple $(x_0; y_0)$ de réels donnés, il existe une unique fonction solution vérifiant $f(x_0) = y_0$

Équation différentielle $y' = ay + \mathbf{b}$

Propriété
Soit l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$, où a et b sont des nombre réels.
Soit g une solution particulière de (E)
f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$

Résoudre l'équation différentielle $(E) : \; y' = 3y - 1$

Quelle solution f de l'équation (E) vérifie $f(0) = 1$?

Equation différentielle $y' = ay + f$

Propriété
Soit l'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$, où a est un nombre réel et f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$
Soit g une solution particulière de (E)
f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = e^{2x}$

a. Vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 0{,}2e^{2x}$ est solution de (E).
b. Montrer que f est solution de (E) équivaut $f - p$ solution de $y' + 3y = 0$.
c. En déduire les solutions de (E).

EXERCICES

EXERCICE 1

1) Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (3x + 1)e^x$ et $G(x) = (4x + 3)e^x$ sont-elles des primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x + 4)e^x$?

2) Déterminer une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

CORRECTION 1

EXERCICE 2

- $f(x) = \cos(3x)$ est-elle solution de $y'' = -9y$?
- $g(x) = \sin(3x) + 4$ est-elle solution de $y'' = -9y$?
- $h(x) = \sin(3x + 4)$ est-elle solution de $y'' = -9y$?

CORRECTION 2

EXERCICE 3

Résoudre l'équation différentielle $y' = -2y$

Résoudre l'équation différentielle $y' = -2y - 5$

CORRECTION 3